Планиметрия. 1

1 Формула биссектрисы

1. Длины сторон треугольника равны a, b и c. Биссектриса длиной ℓ проведена к стороне c.

а) Докажите, что
$$\ell = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b},$$
где γ — угол между сторонами a и b.

б) Докажите, что
$$\ell^2 = ab - xy,$$
где x и y — длины отрезков, на которые биссектриса разбивает сторону c.

2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.2*) В треугольнике ABC стороны AB и BC равны соответственно 3 и 1. Биссектриса BD равна $\sqrt{2}$. Найдите угол BAC.

$\boxed{\arccos\frac{3\sqrt{3}}{5}}$

3. (*«Физтех», 2023, отбор, 11*) Окружность проходит через вершины A и B прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), а также через точку L пересечения стороны BC с биссектрисой AL. Катет AC точкой пересечения N с окружностью оказался разделён на два отрезка: $AN = 4$, $NC = 8$. Найдите площадь треугольника ABC. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

$\boxed{96}$

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11.4*) Продолжение биссектрисы AD треугольника ABC пересекает окружность, описанную вокруг этого треугольника, в точке E. Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $AE = d$.

$\boxed{\left(d^2\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$

2 Теорема Менелая

5. (*«Физтех», 2015, 10.4, 11.4*) На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM : MC = 2 : 5$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF : FC = 1 : 4$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Указание. Решать можно по-разному. Давайте сначала найдём $BP : PL$ по теореме Менелая.

$\boxed{\text{а) } 9 : 40;\ \text{б) } \arccos\frac{3\sqrt{21}}{14}}$

6. (*«Ломоносов», 2019, 10–11.4*) На стороне AC треугольника ABC взяты точки E и K, причём точка E лежит между точками A и K и $AE : EK : KC = 3 : 5 : 4$. Медиана AD пересекает отрезки BE и BK в точках L и M соответственно. Найдите отношение площадей треугольников BLM и ABC.

$\boxed{\frac{1}{5}}$

7. (*«Физтех», 2024, отбор, 11.5*) На рёбрах SA, SB треугольной пирамиды $SABC$ отмечены точки Q, P соответственно, причём $SQ : QA = 3 : 5$ и $SP : PB = 1 : 5$; R — точка пересечения медиан треугольника ABC. Плоскость PQR пересекает ребро BC в точке D. Найдите длину отрезка CD, если известно, что длина $BC = 7$.

$\boxed{4}$

Следующие две задачи — с виду обычные текстовые. И решать их можно как обычные задачи на движение. Однако имеется короткое геометрическое решение через теорему Менелая. Строим графики движения и ищем нужную геометрию!

8. (*МГУ, ДВИ, 2016.6*) Ровно в 9:00 из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две трети пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт А, если известно, что автобус прибыл в пункт А ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

$\boxed{12{:}00}$

9. (*«Курчатов», 2021, 11.2*) Из деревни в город шёл путник. В 14:00, когда путник прошёл четверть пути, из деревни в город выехал мотоциклист, а из города в деревню — грузовик. В 15:00 мотоциклист догнал путника, а в 15:30 встретил грузовик. Во сколько путник встретит грузовик?

$\boxed{15{:}48}$

3 Треугольник XYZ

В задачах с двумя окружностями может помочь вспомогательный треугольник, который обычно нужно дополнительно строить (поэтому мы и называем его условно XYZ). Располагаться он может по-разному, но одна из его сторон — отрезок, соединяющий центры окружностей (или параллельно сдвинутый такой отрезок).

Задачи 10–14 являются вспомогательными. Они проясняют основную идею в более простых ситуациях.

10. Окружности радиусами R и r касаются внешним образом. Найдите длину отрезка их общей касательной.

$\boxed{2\sqrt{Rr}}$

11. (*problems.ru, 52889*) Радиусы двух окружностей равны 27 и 13, а расстояние между центрами равно 50. Найдите длины их общих касательных.

$\boxed{48 \text{ и } 30}$

12. (*problems.ru, 53084*) Две окружности радиусов 5 и 3 касаются внутренним образом. Хорда большей окружности касается меньшей окружности и делится точкой касания в отношении $3:1$. Найдите длину этой хорды.

8

13. (*ЕГЭ, 2013*) Окружности радиусов 1 и 4 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке C. AO_1 и BO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle AO_1O_2 = 60°$. Найдите AB.

5 или 7

14. (*ЕГЭ, 2010*) В окружности, радиус которой равен 5, проведена хорда $AB = 8$. Точка C лежит на хорде AB так, что $AC : BC = 1 : 2$. Найдите радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды AB в точке C.

8/9 или 32/9

15. (*«Физтех», 2023, 10.3*) Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

8

16. (*«Физтех», 2023, 11.4*) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 9\right)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

$a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

17. (*«Физтех», 2012.4*) Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные AC и BD. Их точки касания с меньшей окружностью — A и B, с большей окружностью — C и D. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AB = 24/5$, $AC = 12$.

3 и 12

18. (*«Физтех», 2023, отбор, 11*) Окружности Ω и ω радиусов 5 и 4 соответственно касаются друг друга внешним образом в точке T. Прямая ℓ пересекает окружность ω в точках A и B, а окружность Ω — в точках C и D, причём B лежит между A и C, C лежит между B и D, а центры окружностей лежат по одну сторону от ℓ. Известно, что $AB : BC : CD = 4 : 1 : 6$. Найдите BC^2. При необходимости округлите ответ до трёх знаков после запятой.

$\frac{864}{385} \approx 2{,}244$