

## Параметры-1

### 1 Параметры и свойства функций

1. («Покори Воробьёвы горы!», 2016.5) Укажите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2y(x - a) + a^2 = 0, \\ 2^{-2-y} \cdot \log_2 x < 1 \end{cases}$$

имеет решения, и найдите эти решения.

$$a = 0 \vee a = -1 \vee a = -2$$

2. («Ломоносов», 2005.8) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$||x - a| + 2x| + 4x = 8|x + 1|$$

не имеет ни одного корня.

$$a \in (-2; -1)$$

3. («Ломоносов», 2013.5) Функция  $f(t)$  с областью определения  $D(f) = [1; +\infty)$  удовлетворяет уравнению

$$f\left(\frac{4^y + 4^{-y}}{2}\right) = y$$

для любого  $y \geq 0$ . Для каждого значения  $a \neq 0$  найти все решения неравенства  $f\left(\frac{a}{x+2a}\right) \leq 1$ .

$$a < 0, \text{ то } x \in \left[-\frac{1}{26a}; -\frac{1}{26a} - a\right]; \text{ если } a > 0, \text{ то } x \in [-a; -\frac{1}{26a}]$$

4. («Ломоносов», 2014.4) Найдите все пары  $(a, b)$ , при которых множество решений неравенства

$$\log_{2014}(x - a) > 2x^2 - x - b$$

совпадает с промежутком  $(0; 1)$ .

$$a = \frac{1}{2014}, b = \log_{2014} 2013$$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2017.4) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$a \log_3 x + \log_{\frac{1}{2}} x > 1$$

имеет решения, причём среди решений нет больших 1.

$$a \in (-\infty; \log_3 3)$$

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2015.5) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$25^{-|x-a|} \log_{\sqrt[5]{7}}(x^2 - 2x + 3) + 5^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{7}}(2|x-a| + 2) = 0$$

имеет ровно три различных решения.

$\frac{7}{8}, 1, \frac{7}{1}$

7. («Ломоносов», 2019.7) Сколько существует значений параметра  $a$ , при которых уравнение

$$4a^2 + 3x \lg x + 3 \lg^2 x = 13a \lg x + ax$$

имеет единственное решение?

2

## 2 Параметры и область значений функции

8. («Курчатов», 2017, 11.2) Сколько решений в вещественных числах имеет уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi x}{1+x+x^2} = \sqrt{3}?$$

9

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2016.5) При каких значениях  $a$  и  $b$  неравенство

$$b < 16 \frac{2x-1}{4x^2-4x+5} \leq a$$

выполняется для всех действительных  $x$ ?

$\frac{8}{1} > q \cdot z \leq v$

10. («Покори Воробьёвы горы!», 2015.5) Найдите все значения  $a$ , при которых существует целое число  $n$ , удовлетворяющее уравнению

$$n^2 \cdot 3^a - 3^a - 16n = 9 \cdot 3^{-a} - 3^{2-a} \cdot n^2.$$

$\frac{8}{2 \wedge 9 \mp 9 \Gamma} \text{ЭЭОГ} = v$  или  $\Gamma = v$

## 3 Параметры в тригонометрии

11. («Физтех», 2011.5) Найдите все значения параметра  $b$ , для каждого из которых существует число  $\alpha$  такое, что уравнение

$$x^2 + (2 \sin \alpha - \cos \alpha)x - b = 0$$

имеет действительное решение.

$(\infty + \frac{7}{8} - ]$

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2019.3) При каких значениях  $a$  существует  $b$  такое, что уравнение

$$\sin^2 b \sin x + \cos^2 b \cos x = a$$

не имеет решений?

$$\left(\infty + \frac{\pi}{1}\right) \cap \left(\frac{\pi}{1} - \infty -\right) \ni v$$

13. (ММО, 2014, 11.2) Найдите все значения  $a$ , для которых найдутся такие  $x$ ,  $y$  и  $z$ , что числа  $\cos x$ ,  $\cos y$  и  $\cos z$  попарно различны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию, при этом числа  $\cos(x+a)$ ,  $\cos(y+a)$  и  $\cos(z+a)$  также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию.

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u \cdot u = v$$

14. («Физтех», 2024, 11.3) Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

$$\mathbb{Z} \ni \eta \cdot \frac{1-d \wedge + 1}{1} \text{ source } \neq \eta \cdot \eta = x \cdot (\infty + \cdot 1] \cap [L - \cdot \infty -) \ni d$$

15. (САММАТ, 2021, 11.7) Укажите, при каких значениях параметра  $a$  уравнение имеет решение:

$$2 \cos^2 \left(2^{4x-x^2-4}\right) = 5a - \sqrt{3} \sin \left(2^{4x-x^2-3}\right).$$

$$\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right) \ni v$$

#### 4 Тригонометрический треугольник

16. (МГУ, мехмат, 1999-07.3) При каких значениях  $\varphi$  все положительные корни уравнения

$$\cos \left(\frac{x}{2} + \varphi\right) - \cos \left(\frac{3x}{2} + \varphi\right) = \sin \frac{x}{2},$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u \cdot u + \frac{\pi}{2} -$$

17. («Ломоносов», 2014.5) Найдите все значения  $\alpha$ , при каждом из которых нули функций

$$f(x) = \sin \left(\frac{3x}{2} + \alpha\right) \quad \text{и} \quad g(x) = 2 \sin 2x + 4 \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}$$

строго чередуются на числовой оси.

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u \cdot u + u > v > u \cdot u + \frac{\pi}{2}$$