Основная теорема арифметики. НОД и НОК

1 Основная теорема арифметики

1. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 6.1*) В доме на всех этажах во всех подъездах равное количество квартир (больше одной). Также во всех подъездах поровну этажей. При этом количество этажей больше количества квартир на этаже, но меньше, чем количество подъездов. Сколько в доме этажей, если всего квартир 715?

2. (*«Надежда энергетики», 2022, 5.2*) В доме не один подъезд, и во всех подъездах одинаковое число этажей. Число квартир на каждом этаже одинаковое, оно меньше числа подъездов. А число подъездов меньше числа этажей. Всего в доме 165 квартир. Сколько в доме подъездов?

3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 5.2, 6.2*) Приведите пример таких целых чисел a и b, что $ab(2a+b)=2015$.

4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 7.2*) Приведите пример таких целых чисел a и b, что
$$(10a+b)(a+10b)(a+b+1)=2015.$$

5. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 7.1, 8.1*) Существуют ли такие натуральные числа m, n, что $mn(m+n)=2020$?

6. (*Математический праздник, 1999, 6.2*) Укажите пять целых положительных чисел, сумма которых равна 20, а произведение — 420.

7. (*Математический праздник, 2007, 6.2, 7.2*) В конце четверти Вовочка выписал подряд в строчку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? («Колов» учительница пения не ставит.)

8. (*Московская устная олимпиада, 2015, 6.2*) Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие — втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 864 метра. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

9. (*Турнир Ломоносова, 1983*) Сколько двоек будет в разложении на простые множители числа 1984! ?

10. (*Турнир Ломоносова, 1986*) Бывают ли натуральные числа, произведение цифр которых равно 1986?

11. (*Турнир Ломоносова, 2021*) Вставьте вместо каждой звездочки цифру так, чтобы произведение трех десятичных дробей равнялось натуральному числу. Использовать ноль нельзя, зато остальные цифры могут повторяться.
$$*{,}*\cdot *{,}*\cdot *{,}* = *.$$

12. (*Турнир Ломоносова, 2022*) Произведение пяти различных целых чисел равно 2022. Чему может равняться их сумма? Если ответов несколько — укажите их все.

13. (*Математический праздник, 2008, 7.1*) Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число.

14. (*Математический праздник, 1995, 7.1*) Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–8.4*) Коробка с сахаром имеет форму прямоугольного параллелепипеда. В ней находится 280 кусочков сахара, каждый из которых — кубик размером $1 \times 1 \times 1$ см. Найдите площадь полной поверхности коробки, если известно, что длина каждой из её сторон меньше 10 см.

16. (*Всеросс., 2018, МЭ, 7.4*) На клетчатой бумаге нарисовали большой квадрат. Его разрезали на несколько одинаковых средних квадратов. Один из средних квадратов разрезали на несколько одинаковых маленьких квадратов. Стороны всех квадратов проходят по линиям сетки. Найдите длины сторон большого, среднего и маленького квадратов, если сумма их площадей равна 154.

17. (*Матпраздник в Матвертикали, 2021, 7.2*) Фокусник задумал два натуральных числа и сообщил Симе их сумму, а Прову — их произведение. Зная, что произведение равно 2280, Пров смог отгадать задуманные числа только после того, как Сима сообщила, что сумма у неё нечётна и двузначна. Так какие числа задумал фокусник?

18. (*«Росатом», 2016, 7.3*) Вова, Петя и Маша сидят за круглым столом и играют в устный счет. Игра состоит в том, что каждый, услышав «на ушко» от соседа справа число, умножает его на свое, заранее придуманное простое число, и сообщает результат соседу слева. Круг игры начинается с Вовы и заканчивается им, игра завершается после 3 кругов. Первое натуральное число сообщает Вове «на ушко» его бабушка. Вова объявляет всем последнее услышанное им число 86400. Какое число сообщила Вове бабушка, если все придуманные игроками числа были различными?

19. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 11.1*) Докажите, что уравнение $x^2 + 2^{2018}x + 2^{2019} = 0$ не имеет целых корней.

20. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 11.2*) Найдите какую-нибудь пару натуральных чисел a и b, оба бóльших 1, удовлетворяющих уравнению $a^{13} \cdot b^{31} = 6^{2015}$.

21. (*«Ломоносов», 2017, 7–8.6, 9.4*) Про натуральные числа m и n известно, что $3n^3 = 5m^2$. Найдите наименьшее возможное значение $m + n$.

22. (*Всеросс., 2003, ОЭ, 8.1*) Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

23. (*ММО, 2009, 10.1*) Через терминал оплаты на мобильный телефон можно перевести деньги, при этом взимается комиссия — натуральное число процентов. Федя положил целое количество рублей на мобильный телефон, и его счёт пополнился на 847 рублей. Сколько денег положил на счёт Федя, если известно, что комиссия менее 30%?

24. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2010.4*) Даны натуральные числа a и b, причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

25. (*Всеросс., 1996, ОЭ, 9.5, 10.5*) Найдите все натуральные числа, имеющие ровно шесть делителей, сумма которых равна 3500.

26. (*«Бельчонок», 2021, 9.4*) Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$x^2y^3 = 3^{15} \cdot 20^{20} \cdot 5^{15}?$$

2 НОД и НОК

27. (*«Бельчонок», 2019, 5.4*) На клетчатой бумаге начертили прямоугольник размером 301×215 клеток и провели диагональ. Сколько клеток прямоугольника она пересекает по внутренним точкам?

28. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.2, 7–9.1*) Найдите наименьшее натуральное N такое, что $N + 2$ делится (без остатка) на 2, $N + 3$ — на 3, ..., $N + 10$ — на 10.

29. (*«Физтех», 2014, 7–10*) Какое наибольшее значение может быть у наибольшего общего делителя чисел $11n + 6$ и $23n + 5$, если n — натуральное число?

30. (*«Росатом», 2021, 8.2*) На какое натуральное число можно сократить числитель и знаменатель обыкновенной дроби вида $\frac{3n+2}{5n-7}$? При каких целых n это может произойти?

31. Петя расставил на окружности 100 точек. Затем покрасил первую точку и продолжает красить их, постоянно двигаясь часовой стрелке. Какое наибольшее количество точек Петя сможет закрасить, если он красит:
а) каждую девятую точку;
б) каждую двенадцатую точку?

32. (*«Физтех», 2023, 8*) За круглый стол сели 246 магистров двух орденов: ордена Лжецов (они всегда лгут) и ордена Рыцарей (они всегда говорят правду). Хотя бы по одному магистру из каждого ордена есть. Какое наибольшее число из сидящих за столом могло сказать: «Через 16 человек от меня есть магистр из ордена Рыцарей»?

33. Пусть $\text{НОД}(a, b) = d$. Это значит, что $a = xd$ и $b = yd$, где числа x и y взаимно просты. Покажите, что $\text{НОК}(a, b) = xyd$.

34. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 9.5*) Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОД}(a, b) + 19$$

(и докажите, что других нет).

35. (*Всеросс., 1995, ОЭ, 10.2*) Натуральные числа m и n таковы, что

$$\text{НОК}(m, n) + \text{НОД}(m, n) = m + n.$$

Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое.

36. (*«Физтех», 2012, 9–11*) Какое количество натуральных чисел a обладает следующим свойством: «Наименьшее общее кратное чисел 16, 50 и a равняется 1200»?

37. (*«Физтех», 2012, 9–10*) Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 5000?