# Остатки и сравнения

## 1 Остатки

**1.** (*Всеросс., 2015, МЭ, 7.1*) В тридевятом царстве есть только два вида монет: 16 и 27 тугриков. Можно ли заплатить за одну тетрадку ценой в 1 тугрик и получить сдачу?

Да

**2.** (*Московская устная олимпиада, 2013, 6.1*) В ряд лежат 1000 конфет. Сначала Вася съел девятую конфету слева, после чего съедал каждую седьмую конфету, двигаясь вправо. После этого Петя съел седьмую слева из оставшихся конфет, а затем съедал каждую девятую из них, также двигаясь вправо. Сколько конфет после этого осталось?

763

**3.** (*САММАТ, 2021, 6.1*) Найти минимальное пятизначное число, все цифры которого различны и при делении которого на 91 в остатке имеем 4.

10287

**4.** (*«Надежда энергетики», 2023, 5.1*) Некто пишет подряд без пробелов слово «математика». Вот так:

`МАТЕМАТИКАМАТЕМАТИКАМАТЕМАТИКА...`

Какой буквой будет 2023-я буква в этой цепочке?

Буква Т

**5.** (*«Ломоносов», 2012, 7.2*) Вася набирает электронное письмо другу, нажимая на клавиши пальцами одной руки в следующем порядке: большим, указательным, средним, безымянным, мизинцем, безымянным, средним, указательным, большим, указательным, далее по циклу. Каким пальцем был набран 2012-й символ?

Безымянным

**6.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.5, 7–8.4, 9.2*) Филателист Андрей решил разложить все свои марки поровну в 3 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он разложил их поровну в 7 конвертов, осталось 5 марок. Сколько всего марок у Андрея, если известно, что недавно он купил для них дополнительный альбом, вмещающий 150 марок, так как такого же старого альбома уже не хватало?

208

**7.** (*САММАТ, 2022, 6.5*) Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 даёт в остатке 3, при делении на 6 — в остатке 4, а при делении на 7 — в остатке 5.

208

**8.** (*Открытая олимпиада, 2023, 7.5*) Трёхзначное число АБВ даёт при делении на 37 остаток 4. Какой остаток даёт при делении на 37 число БВА? Не забудьте доказать, что другие ответы не подходят.

3

**9.** (*«Росатом», 2018, 8.4*) Натуральные числа $a$ и $b$ таковы, что $a$ при делении на 3 имеет остаток 2, $b$ при делении на 7 — остаток 1, а их произведение при делении на 21 имеет в остатке 2. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $a + b$, если $a$ и $b$ трехзначные числа.

$(a+b)_{\min} = 213$

**10.** (*САММАТ, 2023, 8.5*) Существует ли натуральное $n$, такое что $n^2 + n + 1$ делится на 1001?

не существует

**11.** Найдите все возможные остатки от деления квадрата целого числа на 3; на 4; на 5. Объясните, почему число $100\ldots04$ (сколько угодно нулей) не может быть квадратом целого числа.

а) 0 и 1; б) 0 и 1; в) 0, 1 и 4.

**12.** (*«Надежда энергетики», 2019, 7.2, 8.2*) Может ли число $n^2 + n + 2$ делиться на 2019 при каких-либо натуральных $n$? Либо найдите такое минимальное $n$, либо докажите невозможность.

таких $n$ не существует

**13.** (*«Надежда энергетики», 2022, 8.3*) Верно ли, что среди любых 2022 целых чисел можно выбрать два, разность которых кратна 2021?

Верно

**14.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8.2*) Агент Бонд (Джеймс Бонд) возводит число 7 в последовательные натуральные степени: $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, ...

а) Верно ли, что в какой-то момент он получит число (отличное от 7), которое оканчивается на $\ldots 7$?

б) Верно ли, что рано или поздно он получит число, которое оканчивается на $\ldots 007$?

а) Да; б) да

**15.** (*ОММО, 2010.1*) Десятичная запись натурального числа $n$ содержит шестьдесят три цифры. Среди этих цифр есть двойки, тройки и четвёрки. Других цифр нет. Число двоек на 22 больше числа четвёрок. Найти остаток от деления $n$ на 9.

5

**16.** (*ОММО, 2014.3*) Натуральное 61-значное число $A$ записывается только цифрами 2, 3 и 4. При этом двоек на 19 больше, чем четвёрок. Найдите остаток от деления числа $A$ на 9.

2

**17.** (*ОММО, 2015.3*) Если из четырёхзначного числа $X$ вычесть сумму его цифр, то получится натуральное число $N = K^2$, причём $K$ — натуральное число, дающее остаток 5 при делении на 20 и остаток 3 при делении на 21. Найдите число $N$.

2025

**18.** (*ОММО, 2015.3*) Четырёхзначное число $X$ не кратно 10. Сумма числа $X$ и числа, полученного из $X$ перестановкой его второй и третьей цифр, делится на 900. Найдите остаток от деления числа $X$ на 90.

45

**19.** (*ОММО, 2018.3*) Вася хочет найти все целые числа $a$ такие, что выражение $10n^3 - 3n^5 + 7an$ делится на 15 для всех целых $n$. Какие остатки может давать число $a$ при делении на 15? Укажите все возможные ответы или докажите, что таких целых чисел $a$ нет.

$\boxed{a = 14}$

## 2 Сравнения

Определение. Запись $a \equiv b \pmod{m}$ означает, что числа $a$ и $b$ имеют одинаковые остатки при делении на $m$. Читается так: $a$ сравнимо с $b$ по модулю $m$.

**20.** Докажите, что $a \equiv b \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда $a - b$ делится на $m$.

**21.** (*Свойства сравнений*) Пусть $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$. Докажите, что:

- $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ — сравнения по одному и тому же модулю можно складывать друг с другом;
- $ac \equiv bd \pmod{m}$ — сравнения по одному и тому же модулю можно умножать друг на друга;
- $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, $n \in \mathbb{N}$ — сравнение можно возвести в любую натуральную степень;
- $ka \equiv kb \pmod{m}$, $k \in \mathbb{Z}$ — сравнение можно умножить на любое целое число.

**22.** (*САММАТ, 2022, 8.7*) Число $a$ при делении на 13 дает остаток 7. Каким будет остаток при делении на 13 числа $15a^2 + 4a + 9$?

$\boxed{5}$

**23.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.2, 7–8.1*) Определите, является ли число

$$N = 7 \times 9 \times 13 + 2020 \times 2018 \times 2014$$

простым или составным. Ответ обоснуйте.

$\boxed{\text{составное}}$

**24.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 7.1*) Найдите остаток от деления числа

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2013 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2014$$

на 2015.

$\boxed{0}$

**25.** (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 7.2, 8.1, 10.1*) Можно ли в выражении $A \cdot 5^n + B \cdot 3^{n-1} + C$ подобрать натуральные коэффициенты $A$, $B$ и $C$ так, чтобы ни один из них не делился на 8, но результат при любом натуральном $n$ делился на 8?

$\boxed{\text{да}}$

**26.** (*«Высшая проба», 2013, 8.2*) Докажите, что число

$$10^{10^{10^{2013}}} + 10^{10^{2013}} + 10^{2013} - 1$$

не простое.

**27.** (*«Высшая проба», 2016, 7.4, 8.2*) Найдите наименьшее целое положительное число, представимое в виде $20x^2 + 80xy + 95y^2$ для некоторых целых чисел $x$ и $y$. Строго обоснуйте ответ.

15

**28.** (*Математический праздник, 1998, 7.5*) На Луне имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 фертингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил сдачу — на одну монету больше. Какова наименьшая возможная цена покупки?

6 фертингов

## 3 Последняя цифра

**29.** (*«Надежда энергетики», 2020, 5.2*) Какой цифрой оканчивается значение суммы

$$5^{2020} + 6^{2019}?$$

1

**30.** (*«Надежда энергетики», 2020, 6.2*) Какой цифрой оканчивается значение суммы

$$6^{2020} + 2019^{2020}?$$

Цифрой 7

**31.** (*«Надежда энергетики», 2020, 7.2, 8.2*) Какой цифрой оканчивается значение суммы

$$2019^{2020} + 2020^{2019}?$$

1

**32.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.3, 7–8.2, 9.1*) Найдите наименьшее $n > 2016$ такое, что $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ не кратно 10.

**33.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.3, 7–8.2, 9.1*) Найдите последнюю цифру числа

$$202^{303^{404}}.$$

2

**34.** (*«Росатом», 2023, 7.4*) Найти последнюю цифру в десятичной записи числа

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 2023^2.$$

4

**35.** (*САММАТ, 2023, 6.8*) Найдите две последние цифры, на которые оканчивается сумма

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 49^2 + 50^2.$$

25

**36.** (*«Покори Воробъёвы горы!», 2013, 7.2*) Натуральные числа $m$ и $n$, $m \neq n$, таковы, что число $2013^m$ имеет такую же последнюю цифру, как и $2013^n$.

а) Приведите пример таких чисел $m$ и $n$.

б) Выясните, какое наименьшее значение может принимать величина $m + n$.

а) 1 и 5; б) 6

**37.** (*ОММО, 2012.3*) Найдите последнюю цифру числа $2 \cdot 7^{(2012^{2011})} + 5 \cdot 13^{(12^{11})}$.

7

**38.** (*МФТИ, 2002*) Дано число $a = 3^{2002} + 7^{2002}$. Найти последнюю цифру числа $a$ и остаток от деления числа $a$ на 11.

8 и 3