Оценка плюс пример

1. Какое наибольшее количество полосок 1×3 можно вырезать из клетчатого квадрата размером 5×5?

2. (*«Высшая проба», 2018, 7.3, 8.3*) Какое максимальное количество полосок 5×1 можно вырезать из квадрата на клетчатой бумаге размера 8×8 клеток?

3. Какое наибольшее количество трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата размером 4×4?

4. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 7.3*) Дан клетчатый прямоугольник 7×14 (клеток). Какое наибольшее количество трехклеточных уголков можно вырезать из этого прямоугольника?

5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 5.4, 6.2*) У Вити есть белая доска из 16 клеток в форме квадрата 4×4, из которой он хочет вырезать 4 белых трёхклеточных уголка. Петя же хочет ему помешать, окрашивая некоторые клетки в красный цвет. Какое наименьшее количество клеток ему придётся закрасить?

6. (*«Надежда энергетики», 2016, 7.2*) Треугольник разрезали на два треугольника. Найдите наибольшее значение N такое, что среди 6 углов этих двух треугольников ровно N одинаковых.

7. (*Московская устная олимпиада, 2013, 6.6*) Для игры в шляпу Надя хочет разрезать лист бумаги на 48 одинаковых прямоугольников. Какое наименьшее количество разрезов ей придется сделать, если любые куски бумаги можно перекладывать, но нельзя сгибать, а Надя способна резать одновременно сколько угодно слоёв бумаги? (Каждый разрез — прямая линия от края до края куска.)

8. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 6.1*) В каждую клетку таблицы 100×100 записали натуральное число. Оказалось, что каждое число либо больше всех своих соседей, либо меньше всех соседей. (Два числа называются соседями, если они стоят в клетках с общей стороной.) Какое наименьшее значение может принимать сумма всех чисел?

9. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 5.4*) Белоснежка вошла в комнату, где вокруг круглого стола стояло 30 стульев. На некоторых из стульев сидели гномы. Оказалось, что Белоснежка не может сесть так, чтобы рядом с ней никто не сидел. Какое наименьшее число гномов могло быть за столом? (*Объясните, как должны были сидеть гномы и почему, если бы гномов было меньше, Белоснежка нашла бы стул, рядом с которым никто не сидит*).

10. (*ММО, окружной тур, 2008, 7.3*) Новогодняя гирлянда, висящая вдоль школьного коридора, состоит из красных и синих лампочек. Рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя. Какое наибольшее количество красных лампочек может быть в этой гирлянде, если всего лампочек 50?

11. (*Математический праздник, 2020, 6.3*) На доске написаны числа $2, 3, 4, \ldots, 29, 30$. За рубль можно отметить любое число. Если какое-то число уже отмечено, можно бесплатно отмечать его делители и числа, кратные ему. За какое наименьшее число рублей можно отметить все числа на доске?

12. (*Олимпиада КФУ, 2022, 6.3*) В клетках таблицы 4×4 расставлены натуральные числа от 1 до 16 (в каждой клетке — по одному числу). В каждом квадратике 2×2, состоящем из четырёх клеток этой таблицы, отметили наибольшее из чисел, стоящих в них. Какое наибольшее и какое наименьшее количество чисел могло быть отмечено? Обоснуйте свой ответ.

13. (*«Высшая проба», 2020, 7.2*) Имеется пять гирь различного веса, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что две самые тяжёлые гири весят в два раза больше трёх других, а три самые тяжёлые гири весят в восемь раз больше двух других. Найдите наименьшее возможное значение суммарного веса всех гирь.

14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.5; 7–8.4; 9.2*) Найдите наибольшее натуральное число, которое невозможно представить в виде суммы двух составных чисел.

15. (*Московская устная олимпиада, 2015, 6.6*) Из одинакового количества квадратов со сторонами 1, 2 и 3 составьте квадрат наименьшего возможного размера.

16. (*Математический праздник, 2015, 6.5*) Обезьяна становится счастливой, когда съедает три разных фрукта. Какое наибольшее количество обезьян можно осчастливить, имея 20 груш, 30 бананов, 40 персиков и 50 мандаринов? Обоснуйте свой ответ.

17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.4*) У Маши есть 2 кг конфет «Ласточка», 3 кг конфет «Трюфель», 4 кг конфет «Птичье молоко» и 5 кг конфет «Цитрон». Какое наибольшее количество новогодних подарков она может составить, если каждый подарок должен содержать 3 различных типа конфет, по 100 грамм каждого?

18. (*«Росатом», 2022, 7.1*) В классе 30 учеников. У одного из них есть 15 красных карандашей, 20 — синих, 25 — зеленых и 40 — черных. Этот ученик решил подарить каждому своему однокласснику по одному набору из трех карандашей разных цветов. Сможет ли он осуществить задуманное? Какое максимальное число таких наборов он сможет собрать?

19. (*«Курчатов», 2017, 6.4*) Алексей написал на доске несколько последовательных натуральных чисел. Оказалось, что лишь у двух из написанных чисел сумма цифр делится на 8: у наименьшего и у наибольшего. Какое максимальное количество чисел могло быть написано на доске?

20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.7, 7–8.6, 9.5*) Ольга Ивановна, классная руководительница 5Б, ставит «Математический балет». Она хочет расставить мальчиков и девочек так, чтобы на расстоянии 5 м от каждой девочки было ровно 2 мальчика. Какое наибольшее количество девочек сможет участвовать в балете, если известно, что в нем участвуют 5 мальчиков?

21. (*«Надежда энергетики», 2018, 7.1*) Автопарк некоторого предприятия состоит из 5 различных машин. Подготовка одного водителя для работы на конкретном типе машины обходится в 10 000 рублей. Директор автопарка хочет обучить 8 водителей таким образом, что при отсутствии любых 3 водителей все машины можно бы было использовать в работе. Как организовать обучение с наименьшими затратами? Какова минимальная достаточная для обучения сумма?

22. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.5, 7–8.5, 9.4*) Английский клуб посещают 20 джентльменов. Некоторые из них знакомы (знакомства взаимные, т. е. если A знает B, то и B знает A). Известно, что в клубе нет трех попарно знакомых между собой джентльменов. Однажды джентльмены пришли в клуб, и каждая пара знакомых пожала друг другу руки (один раз). Какое наибольшее число рукопожатий могло быть сделано?

23. (*Всеросс., 2022, ЗЭ, 9.6*) Для какого наименьшего натурального числа a существуют целые числа b и c такие, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два различных положительных корня, не превосходящих $\frac{1}{1000}$?

24. (*Всеросс., 2019, ЗЭ, 9.2*) При каком наименьшем натуральном n существуют такие целые $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что квадратный трёхчлен

$$x^2 - 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 x + \left(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + 1\right)$$

имеет по крайней мере один целый корень?