

Доказательство неравенств. Задачи на наибольшие и наименьшие значения

1 Алгебраические преобразования

1. (САММАТ, 2021, 8.4) Докажите справедливость следующего неравенства

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2019 \cdot 2021} < \frac{1}{2}.$$

2. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

3. («Бельчонок», 2021, 8.5) Числа a, b, c удовлетворяют условиям: $a + b + c = 0, abc < 0$. Докажите, что

$$\frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} > 0.$$

4. (Всеросс., 1993, ОЭ, 9.1) Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$a^2 + ab + b^2 \geq 3(a + b - 1).$$

5. (Всеросс., 2015, РЭ, 9.7) Числа a, b, c и d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Докажите, что $(2 + a)(2 + b) \geq cd$.

2 Неравенство Коши

6. Для любых $a, b, c \geq 0$ докажите, что

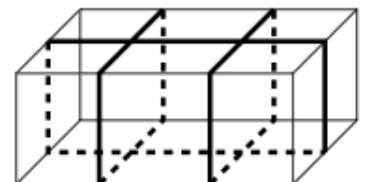
$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

7. (САММАТ, 2022, 8.1) Пусть y — действительное число, отличное от нуля. Известно, что x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y^2}{2} = 0$. Докажите, что $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

8. (Всеросс., 1995, ОЭ, 9.1) Докажите, что для любых положительных чисел x и y справедливо неравенство

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}.$$

9. (ОММО, 2012.10) Псылка должна быть упакована в ящик в форме прямоугольного параллелепипеда и перевязана один раз вдоль и два раза поперек (см. рисунок). Можно ли отправить посылку объема 37 дм^3 , имея $3,6 \text{ м}$ веревки (толщиной стенок ящика и уходящей на узлы веревкой пренебречь)?



10. (ММО, 2016, 10.3) Уравнение с целыми коэффициентами $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет четыре положительных корня с учётом кратности. Найдите наименьшее возможное значение коэффициента b при этих условиях.

9

11. (МГУ, ДВИ, 2015.8) Найдите все пары (α, β) , при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4 - 3 \sin \alpha}{2 + \cos 2\alpha} + \frac{2 + \cos 2\alpha}{\beta^2 + \beta + 1} + \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\sqrt{\beta} + 1} + \frac{\sqrt{\beta} + 1}{4 - 3 \sin \alpha}.$$

$0 = g'(\mathbb{Z} \ni u) \text{ и } \frac{c}{x} = v$

12. (Неравенство Несбитта) Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

13. («Шаг в будущее», 2016, 10.7) Решить неравенство:

$$\frac{2}{\sqrt{x} + x^2} + \frac{2\sqrt{x}}{1 + x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{x} + 1} \geq 3.$$

14. («Шаг в будущее», 2021, 10.2) Число p таково, что неравенство

$$\frac{4a}{3b+4c} + \frac{6b}{4c+2a} + \frac{8c}{2a+3b} \geq p$$

выполняется для всех положительных чисел a, b, c . Найдите наибольшее значение p .

15. Допустим, вы хотите доказать какое-то неравенство, используя неравенство Коши. Пусть у вас есть две неотрицательные величины x и y , и вам надо получить оценку сверху на произведение xy . Вы можете начать так:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

или так:

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Как вы думаете, какая оценка лучше (точнее)?

16. (Олимпиада Эйлера, 3Э, 2016.7) Сумма неотрицательных чисел a, b, c и d равна 4. Докажите, что

$$(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc) \leq 8.$$

17. (Всеросс., 2009, РЭ, 11.3) Докажите, что $x \cos x \leq \frac{\pi^2}{16}$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

3 Наибольшие и наименьшие значения

18. (Открытая олимпиада, 2017, 11.2) Найдите наименьшее значение выражения

$$x^2 + 4x \sin y - 4 \cos^2 y.$$

19. («Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 11.1) Найдите такую пару чисел (x, y) , при которых выражение

$$x^2 + y^2 + 5 - xy - 2x - 2y$$

принимает наименьшее возможное значение.

20. («Ломоносов», 2021, 9.5) Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$ при $x > 0$.

21. (САММАТ, 2022, 10.7) Найти минимальное значение выражения

$$x^4 - 3x^2 + 4 - \frac{5}{x^2 + 1} + \frac{1}{(x^2 + 1)^2}.$$

22. («Ломоносов», 2020, 10.4) На графике функции $y = x + \frac{1}{x}$, где $x > 0$, найдите точку, ближайшую к началу координат.

23. (Открытая олимпиада, 2023, 9.2) Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{|x-1| + |x-2| + |x-4| + \dots + |x-2^{19}|}.$$

24. («Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 11.2) Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = |x| + 2|x-1| + 3|x-2| + \dots + 11|x-10|.$$

25. (САММАТ, 2023, 9.5) Найти наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2},$$

где x, y — произвольные вещественные числа.

26. («Надежда энергетики», 2023, 11.2) Найдите максимальное значение величины

$$x^2 + y^2 + z^2,$$

если известно, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3x + 8y + z.$$

27. (Всесиб., 2020, 10.3) Найти минимальное и максимальное значения выражения

$$3x^2y - 2xy^2,$$

где x, y принимают произвольные значения из интервала $[0, 1]$.

28. («Росатом», 2017, 11.1) Отрезок $[2; 29]$ числовой оси разбит двумя точками a и b на три отрезка, длины которых x, y и z соответственно. Найти наибольшее возможное значение выражения $\log_3 x + \log_3 y + \log_3 z$.

29. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 9.3, 10.2) Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left(\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y} + \frac{yz}{x}\right) \left(\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}\right),$$

где x, y, z — ненулевые вещественные числа.

30. («Покори Воробьёвы горы!», 2022, 10.3) Найдите количество натуральных делителей наибольшего целого значения выражения

$$xyz + xy + yz + zx + 2023,$$

если сумма неотрицательных чисел x, y и z равна 2022.

31. (Олимпиада КФУ, 2020, 10.3) На каждой грани куба написано по одному положительному числу. Для каждой вершины подсчитали произведение чисел на трёх примыкающих к ней гранях, сумма восьми полученных чисел оказалась равной 1000. Найдите наименьшее возможное значение суммы шести чисел, написанных на гранях куба.

32. (Открытая олимпиада, 2019, 9.3) В стране Налогии каждый платит со своей зарплаты столько процентов налога, сколько тысяч тугриков составляет эта зарплата. Какую зарплату иметь выгоднее всего?

(Зарплата измеряется положительным, не обязательно целым числом тугриков.)

33. («Надежда энергетики», 2022, 9.5) Удовольствие, получаемое от каникул, пропорционально квадрату их продолжительности. Что выгоднее для увеличения удовольствия: устроить неразрывные каникулы или разделить их на две части? В какое максимальное количество раз (и в какую сторону) изменится удовольствие при разделении на две части?

34. («Надежда энергетики», 2022, 10.1) Энергетические затраты Сиропчика во время еды пропорциональны кубу объема съеданной порции. Что выгоднее для экономии энергетического запаса: съесть бидончик мороженого как одну порцию или разделить его на две? В какое максимальное количество раз (и в какую сторону) изменятся затраты при разделении на две порции?

35. («Надежда энергетики», 2022, 11.1) Энергетические затраты Пончика во время еды пропорциональны корню квадратному из объема съеданной порции. Что выгоднее для экономии энергетического запаса: съесть свежую кулебяку как одну порцию или разделить ее на две? В какое максимальное количество раз (и в какую сторону) изменятся затраты при разделении кулебяки на две порции?

36. («Шаг в будущее», 2020, 11.1) Цех выпускает трансформаторы видов A и B . На один трансформатор вида A расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг проволоки, а на трансформатор вида B — 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации трансформатора вида A прибыль составляет 12 тысяч рублей, вида B — 10 тысяч рублей. Сменный фонд железа составляет 481 кг, проволоки — 301 кг. Сколько трансформаторов видов A и B нужно выпустить за смену, чтобы получить наибольшую прибыль от продажи изделий, если расход ресурсов не должен превышать выделенных на смену фондов? Чему будет равна при этом наибольшая прибыль?