

Логарифмические вычисления, уравнения и неравенства

1 Логарифмические преобразования и вычисления

1. («Ломоносов», 2006.1) Вычислите

$$\log_2 \log_8 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{64}}}}_{39}$$

8Э-

2. («Ломоносов», 2008.2) Какое наибольшее число раз можно последовательно взять логарифм по основанию 2 от числа 16^{64} (первый раз логарифм берётся от этого числа, а затем всякий раз — от числа, полученного в предыдущий раз)?

Пять раз

3. («Надежда энергетики», 2017, 11.1) Финансовый аналитик энергетической компании после сложных расчетов с применением математических методов вычислил, что прибыль компании за 2016 год составила S миллионов рублей, где

$$S = \lg(10^4 \operatorname{tg} 2017^\circ) + \lg(10^5 \operatorname{tg} 2018^\circ) + \dots + \lg(10^{20} \operatorname{tg} 2033^\circ).$$

Совет директоров не удовлетворился этими сведениями и попросил аналитика указать не формулу вычисления S , а результат, т. е. конкретное число. Через 11 минут число S было получено. Каково оно?

$S = 204$

4. (Открытая олимпиада, 2022, 11.2) Вася придумал новую операцию на множестве положительных чисел: $a * b = a^{\ln b}$. Найдите логарифм числа $\frac{(ab) * (ab)}{(a * a)(b * b)}$ по основанию $a * b$.

2

5. («Ломоносов», 2007.3) Какие значения может принимать выражение

$$\log_{b_{21}b_{50}} b_1 b_2 \dots b_{70},$$

где b_1, b_2, \dots — геометрическая прогрессия?

3Э

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2010.3) Положительные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 составляют геометрическую прогрессию. Сумма логарифмов по основанию 3 от этих чисел равна 10. Найдите эти числа, если $\log_3 b_1 \cdot \log_3 b_5 = 3$.

$3, 3\sqrt[3]{6}, 9, 9\sqrt[3]{6}, 27$

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11.1) Найдите все значения x , при каждом из которых выражения

$$\log_{2013} \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x \right) \quad \text{и} \quad \log_{2012} \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \operatorname{tg} x \right)$$

равны друг другу.

$\mathbb{Z} \ni u, u\pi = x$

8. («Ломоносов», 2017, 10–11.3) Выясните, какое из чисел больше: $11^{\lg 121}$ или $10 \cdot 10^{\lg^2 11} + 11$.

Первое

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11.1) Выясните, какое из чисел больше:

$$\frac{\lg 2013}{2 \lg 2} \quad \text{или} \quad 2 \lg \frac{2013}{2}.$$

Второе

10. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11.1) Выясните, какое из чисел больше:

$$\log_{2012} 2013 \quad \text{или} \quad \log_{2013} 2014.$$

Первое

11. («Физтех», 2021, 11.5) Даны числа $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1} \left(\frac{x}{2} + 2 \right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1?

$\mathbb{Z} = x$

2 Логарифмические уравнения

12. (МГУ, мехмат, 2006.1) Игорь и Володя решали задачу: некоторое заданное трёхзначное число прологарифмировать по основанию 2, из полученного числа вычесть некоторое заданное натуральное число, а затем разность разделить на то же самое натуральное число. Игорь перепутал и в первом действии прологарифмировал по основанию 3, а Володя посчитал правильно. Когда они сверили свои результаты, оказалось, что полученные ими числа взаимно обратны. Найти исходное трёхзначное число.

216

13. («Физтех», 2015, 11.2) Решите уравнение

$$x^{\log_3(27x^2)} = \frac{x^9}{81}.$$

6, 3

14. («Физтех», 2014.1) Решите уравнение

$$\log_{2^{x+1}+1} (3x^2 + 4x - 3) = \log_{10-2^{2-x}} (3x^2 + 4x - 3).$$

$\frac{3}{2}, 2$

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.2) Решите уравнение

$$\log_{2/9} 2 = (\log_x 2) \cdot (\log_{4x} 2) \cdot (\log_{9x} 2).$$

$$\left[\frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{4x} \cdot \frac{2}{9x}} \right]$$

16. («Физтех», 2014.3) Решите уравнение

$$\log_{7x-6} (7x^2 + x - 6) \cdot \log_{x+1} (x^3 + 1) = \log_{7x-6} (7x^2 + x - 6) + \log_{x+1} (x^3 + 1).$$

□

17. («Физтех», 2018, 11.1) Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел

$$\log_{x^2}(x^2 - 10x + 21), \quad \log_{x^2} \frac{x^2}{x-7} \quad \text{и} \quad \log_{x^2} \frac{x^2}{x-3}$$

равно сумме двух остальных.

$$\boxed{8 = x}$$

18. (МГУ, мех.мат., 2000-07.2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_{4x} y = 2, \\ 8x - y = 1. \end{cases}$$

$$\left(\frac{8}{9} \right)$$

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2013.4) Решите уравнение

$$\log_3(x+1) \cdot \log_3(2x-1) \cdot (3 - \log_3(2x^2 + x - 1)) = 1.$$

□

3 Логарифмические неравенства

20. («Физтех», 2022, 11.2) Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leq \log_{9x} \frac{1}{x^2}.$$

$$\left\{ \frac{6}{7} \right\}$$

21. («Физтех», 2017, 11.2) Решите неравенство

$$x^{\log_3 x} - 2 \leq \left(\sqrt[3]{3} \right)^{\log^2_{\sqrt{3}} x} - 2 \cdot x^{\log_3 \sqrt[3]{x}}.$$

$$\left(\left[\frac{6}{7} \right] \cap \{1\} \cap \left[\frac{6}{7} \right] \right)$$

22. («Физтех», 2020, 11.3) Решите неравенство

$$27\sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 40 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 48.$$

$$\{\sqrt[3]{\frac{8}{3}}\} \cap [\frac{1}{3}; 1) \ni x$$

23. («Ломоносов», 2013.3) Решить неравенство

$$\log_{x^2+4x+3}(x-4)^2 \cdot \log_{-x^2+3x+4}(3-x)^3 \leq 0.$$

$$\{\frac{1}{3}; 2\} \cap \left(\frac{1}{2} \wedge + \frac{1}{3} - ; \frac{2}{12 \wedge - 1} \right)$$

24. («Физтех», 2016, 11.1) Решите неравенство

$$(x^2 - 3x + 3)^{4x^3+5x^2} \leq (x^2 - 3x + 3)^{2x^3+18x}.$$

$$\{\frac{1}{2}\} \cap [1; 0) \cap [\frac{2}{6} - ; \infty)$$

25. («Ломоносов», 2011.4) Решите неравенство

$$\log_5(5x^2 + 2x) \cdot \log_5\left(5 + \frac{2}{x}\right) > \log_5 5x^2.$$

$$\left(\infty + ; \frac{5}{2 \wedge + 1} - \right) \cap \left(\frac{5}{2} - ; \frac{5}{2 \wedge - 1} - \right)$$

26. («Физтех», 2019, 11.5) Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{6}}(1 + 4x^2) \cdot \log_{\frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{6}}(1 - 4x^2) + 1\right) \log_{1-16x^4} \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{4}{3}x + \frac{5}{6}\right) \geq 1.$$

$$\left[\frac{5}{1} ; 0\right) \cap \left(0 ; \frac{11}{1} - \right] \cap \left(\frac{6}{1} - ; \frac{5}{1} - \right] \cap \left[\frac{5}{1} - ; \frac{5}{1} - \right) \ni x$$