

Комбинаторика

1 Перебор вариантов

1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 5.5*) У Дениса есть одинаковые десятирублёвые монеты, одинаковые двухрублёвые и одинаковые однорублёвые монеты (монет каждого вида больше 20). Сколькими способами Денис сможет заплатить без сдачи за пирожок стоимостью 16 рублей? Не обязательно использовать монеты каждого вида.
2. (*«Высшая проба», 2018, 7.1, 8.1*) Сколькими способами из цифр 1, 2, 3, 4 можно составить число, кратное 6? При составлении числа каждую цифру можно использовать один раз или не использовать совсем.
3. (*Математический праздник, 1997, 7.1*) Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 1996 или с периметром 1998? (Прямоугольники $a \times b$ и $b \times a$ считаются одинаковыми.)
4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 5–6.3*) Назовём натуральное число «примечательным», если все его цифры попарно различны и их сумма равна 18. Найдите количество примечательных чисел, не превосходящих 950.
5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 7–8.3, 9.3*) Назовём натуральное число «примечательным», если все его цифры попарно различны и их сумма равна 18. Найдите сумму примечательных чисел, не превосходящих 950.
6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.6*) Сколькими способами можно разложить число 1024 на три натуральных множителя так, чтобы первый множитель был кратен второму, а второй — третьему?
7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–8.6, 9.5*) Сколькими способами можно разложить число 10000 на три натуральных множителя, ни один из которых не делится на 10? Считаем, что разложения, отличающиеся только порядком сомножителей, не различаются.

2 Правило произведения

8. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 5.1*) В некотором языке есть 3 гласных и 5 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых двух слогов. Сколько слов в этом языке?
9. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 6.1*) В некотором языке есть 5 гласных и 7 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых двух слогов. Сколько слов в этом языке?
10. (*Математический праздник, 1998, 6.1, 7.1*) На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

11. («Бельчонок», 2023, 5.4) Большой отрезок длины 30 разбит точками на отрезки длины 1. Отмечены эти точки и концы большого отрезка. Сколько можно выбрать отрезков с концами в отмеченных точках, длины которых равны нечётному числу? *Выбранные отрезки могут пересекаться и быть частью друг друга.*

12. («Росатом», 2023, 7.1) Каждая из четырех сторон квадрата разделена точками на 9 равных отрезков. На каждой стороне квадрата выбирается по точке деления, исключая вершины, и они являются вершинами выпуклого четырехугольника. Сколько существует таких четырехугольников, у которых ни одна из диагоналей не параллельна сторонам квадрата?

13. (Математический праздник, 1996, 6.3) Каких пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых ни первая, ни вторая цифра слева — не пятёрка?

14. («Ломоносов», 2016, 5–6.4, 7–8.4) Сколько чисел, делящихся на 4 и меньших 1000, не содержат ни одной из цифр 6, 7, 8, 9 или 0?

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2022, 5–6.4, 7–8.3, 9.2) Будем обозначать \overline{abc} трехзначные числа, записанные цифрами a, b, c . Сколько существует трехзначных чисел, таких, что разность $\overline{abc} - \overline{acb}$ делится на 72 без остатка?

16. («Курчатов», 2020, 6.3, 7.2) У Лёни есть карточки с цифрами от 1 до 7. Сколько существует способов склеить из них два трёхзначных числа (одна карточка не будет использоваться) так, чтобы каждое из них делилось на 9?

17. (Математический праздник, 1996, 7.4) Сколькими способами можно прочесть в таблице слово

- а) КРОНА,
- б) КОРЕНЬ,

начиная с буквы К и двигаясь вправо или вниз?

К	Р	О	Н	А	К
Р	О	Н	А	К	О
О	Н	А	К	О	Р
Н	А	К	О	Р	Е
А	К	О	Р	Е	Н
					Н
					Е
					Н
					Е
					Н
					Е

18. («Ломоносов», 2020, 5–6.2, 7–8.2, 9.2) Сколькими способами можно прочесть слово «РОТОР», двигаясь по буквам рисунка, если возвращаться по пути к пройденным буквам нельзя, а прочтения, отличающиеся только направлением, считаются одинаковыми?

Р	О	Т	О	Р
О	Т	О	Р	
Т	О	Р		
О	Р			
Р				

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–8.6, 9.5) Сколько существует пятизначных чисел вида $\overline{ab16c}$, кратных 16? (a, b, c — произвольные цифры, не обязательно разные.)

20. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 6.5, 7.4, 9.3) Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.

21. («Надежда энергетики», 2023, 7.1) Совет деревни тайного трубопровода собирается за круглым столом, причем каждый приходящий может сесть на любое свободное место. Сколько возможно различных вариантов рассадки, если на совет соберется 7 участников? (Две рассадки считаются одинаковыми, если слева и справа от каждого участника сидят те же лица, пустые места не учитываются.)

22. («Надежда энергетики», 2015, 7.2) Наземный клапан подземного газохранилища огражден деревянным забором в виде окружности, разделенной 5 кирпичными столбами на 5 дуг. Требуется раскрасить деревянные части забора так, чтобы каждая дуга была бы одного цвета, а любые две соседние дуги имели разные цвета. Какое минимальное число цветов достаточно? Сколькими способами можно это сделать, используя минимальное число цветов?

3 Количество делителей числа

23. («Ломоносов», 2013, 7.2) а) Сколько натуральных делителей имеет число $N = 1 \underbrace{00 \dots 0}_{99}$?

б) Найдите количество натуральных делителей числа N , не являющихся точными квадратами (т. е. квадратами натуральных чисел).

24. («Росатом», 2017, 7.2) Сколько существует у числа $a = 441000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$ различных делителей, не кратных 15? Найти наибольший такой делитель.

25. (Всеросс., 2021, ШЭ, 6.8) Натуральное число n назовём *хорошим*, если 2020 при делении на n даёт остаток 22. Сколько существует хороших чисел?

26. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.2, 7–8.1) Сколько натуральных чисел от 1 до 2017 имеют ровно три различных натуральных делителя?

27. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.2) Сколько трёхзначных натуральных чисел имеют чётное число различных натуральных делителей?

28. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–8.5, 9.3) Назовем число *замечательным*, если оно имеет ровно 4 различных натуральных делителя, причем среди них найдутся два таких, что ни один не кратен другому. Сколько существует замечательных двузначных чисел?

29. («Ломоносов», 2022, 7–8.2) Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} ?$$

4 Сочетания

30. (Всеросс., 2023, ШЭ, 6.4) На клавиатуре компьютера не работает клавиша с цифрой 1. Например, если попытаться напечатать число 1231234, то пропечатается только число 23234.

Саша попытался напечатать 8-значное число, но пропечаталось только 202020. Сколько существует 8-значных чисел, подходящих под это условие?

31. («Курчатов», 2018, 6.3, 7.2) Сколькими способами можно вставить несколько знаков «+» между цифрами в числе

111111111111

(12 единиц) так, чтобы результат делился на 30?

32. («Ломоносов», 2022, 5–6.4) У Маши есть семь разных кукол, которых она рассаживает по шести разным кукольным домикам так, чтобы в каждом домике оказалась хотя бы одна кукла. Сколькими способами Маша может это сделать? Важно, какая кукла в каком домике окажется. Как именно сидят куклы в том домике, где их две, неважно.

33. («*Покори Воробьёвы горы!*», 2020, 5–6.6) Есть 7 красных, 6 белых и 8 желтых шаров, все шары пронумерованы различными числами. Сколькими способами можно выбрать 3 шара, так, чтобы не все были одного цвета и не все разных цветов? Способы, отличающиеся только порядком шаров, считаем одинаковыми.

34. («*Покори Воробьёвы горы!*», 2020, 7–8.5, 9.3) Есть 7 красных, 6 белых, 8 желтых и 5 черных шаров, все шары пронумерованы различными числами. Сколькими способами можно выбрать 4 шара, так, чтобы не все были одного цвета и не все разных цветов? Способы, отличающиеся только порядком шаров, считаем одинаковыми.

35. («*Покори Воробьёвы горы!*», 2017, 5–6.5, 7–8.6, 9.4) На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольный треугольник с катетами, равными 7 клеткам (катеты идут по линиям сетки). Потом обвели все линии сетки, находящиеся внутри треугольника. Какое наибольшее количество треугольников можно найти на этом рисунке?

36. («*Ломоносов*», 2017, 7–8.5, 9.3) Сколько диагоналей в правильном 32-угольнике не параллельны ни одной из сторон этого 32-угольника?

5 Круги Эйлера. Формула включений и исключений

37. (ММО, 2006, 6.1, *окружной этап*) В саду у Ани и Вити росло 2006 розовых кустов. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно три куста, самые красивые, были политы и Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остались не политыми?

38. («*Росатом*», 2019, 7.1) Каждый пятнадцатый брюнет имеет голубые глаза. Среди обладателей голубых глаз каждый десятый — брюнет. Во сколько раз число брюнетов, не обладающих голубым цветом глаз, больше числа голубоглазых, не являющимися брюнетами?

39. («*Росатом*», 2015, 7.1) Среди 35 учеников 7 «А» класса не любят есть конфеты 13, торты — 12, пряники — 9 учеников. Кроме того, не любят есть конфеты и торты 3, пряники и торты — 6, конфеты и пряники — 5 учеников. Наконец, не любят есть конфеты, торты и пряники 2 ученика. Сколько в классе ребят, которые любят есть конфеты, торты и пряники?

40. («*Покори Воробьёвы горы!*», 2018, 5–6.2; 7–8.1) В кружок робототехники берут только тех, кто знает математику, физику или программирование. Известно, что 8 членов кружка знают физику, 7 — математику, 11 — программирование. При этом известно, что не менее двоих знают одновременно физику и математику, не менее троих — математику и программирование, и не менее четырёх — физику и программирование. Какое наибольшее количество участников кружка может быть при этих условиях?

41. (ММО, 2008, 7, *окружной этап*) По данным опроса, проведённого в 7 «Е» классе, выяснилось, что 20% учеников, интересующихся математикой, интересуются ещё и физикой, а 25% учеников, интересующихся физикой, интересуются также и математикой. И только Пете с Васей не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 7 «Е», если известно, что их больше 20, но меньше 30?

42. (*Всесиб.*, 2015, 7.3) Известно, что у всех *кракозябр* есть рога или крылья (возможно, и то, и то). По результатам всемирной переписи кракозябр выяснилось, что у 20% кракозябр, имеющих рога, есть ещё и крылья, а 25% кракозябр, у которых есть крылья, имеют ещё и рога. Сколько кракозябр осталось в мире, если известно, что их больше 25, но меньше 35?

43. («Бельчонок», 2021, 5.2) На доске записаны все числа от 1 до 300 включительно. Вера раскрашивает в оранжевый цвет только те числа, у которых общий делитель с числом 99 больше 1. Сколько всего чисел станут оранжевыми?
44. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.6, 7–8.5, 9.4) Найдите количество натуральных чисел, кратных 3, не кратных 5 и принадлежащих отрезку $[1200; 2020]$.
45. («Росатом», 2019, 7.4) Среди натуральных чисел от 1 до 2019 есть n чисел кратных 7, но не кратных 8 и m чисел кратных 8, но не кратных 7. Найти $n - m$.
46. (ММО, 1938) Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?
47. («Ломоносов», 2012, 7) Сколько чисел из набора 1, 2, ..., 2010, 2011 не делятся ни на 3, ни на 7?
48. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 7.1) В некотором языке есть 3 гласных и 7 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых трёх слогов. Слово называется забавным, если в нём встречаются две одинаковые буквы подряд. Сколько забавных слов в этом языке?
49. («Физтех», 2014, 7, 8, 10) На столе рубашкой вверх была разложена колода из 36 игральных карт. Лёша перевернул 30 карт, затем Макс перевернул 19 карт, а после этого Боря — 21 карту. В результате вся колода оказалась рубашкой вниз. Сколько карт было перевёрнуто трижды?
50. («Физтех», 2013, 8–9) Трое ребят принялись красить лист ватмана, каждый — в свой цвет. Один закрасил красным 75% листа, второй закрасил зелёным 70% листа, а третий закрасил синим 65% листа. Сколько процентов листа будет заведомо закрашено всеми тремя цветами?
51. («Высшая проба», 2014, 10) В группе 17 человек знают английский язык, 14 человек знают китайский язык, 20 человек знают арабский язык и 19 человек знают польский язык. При этом 34 человека в группе знают ровно один язык из перечисленных, а остальные — ровно два языка из перечисленных. Сколько человек в группе?
52. («Ломоносов», 2013, 9.2) Найдите количество натуральных делителей числа $N = 1 \underbrace{00 \dots 0}_{40}$,
- а) не являющихся ни точными квадратами (т. е. квадратами натуральных чисел), ни точными кубами;
- б) не представимых в виде m^n , где m и n — натуральные числа, причём $n > 1$.
53. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7.4, 8.3, 9.3) Уходя на работу, мама поручила Мише, Пете и Васе: а) подмести пол в прихожей; б) помыть посуду; в) купить хлеба; г) заплатить за электричество; д) вынести мусор; е) пропылесосить ковёр в гостиной. Сколькими различными способами они могут распределить задания так, чтобы каждое задание делал кто-то один из ребят и при условии, чтобы каждый что-нибудь делал?