

## Квадратный трехчлен и квадратные уравнения

### 1 Общий корень

В задачах, где говорится про общий корень двух уравнений, удобно обозначать этот общий корень через  $x_0$  (или как-то еще, чтобы было понятно, что это число), подставлять его в оба уравнения и работать с полученными верными числовыми равенствами как с системой.

1. (Всеросс., 2020, ШЭ, 9.3) У уравнений  $x^2 + 2019ax + b = 0$  и  $x^2 + 2019bx + a = 0$  есть один общий корень. Чему может быть равен этот корень, если известно, что  $a \neq b$ ?

2. (Всеросс., 2000, ЗЭ, 9.1) Различные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что уравнения  $x^2 + ax + 1 = 0$  и  $x^2 + bx + c = 0$  имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения  $x^2 + x + a = 0$  и  $x^2 + cx + b = 0$ . Найдите сумму  $a + b + c$ .

### 2 Теорема Виета

3. («Физтех», 2013, 9) Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 - 2x - 6 = 0$ . Найдите  $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ .

4. («Физтех», 2017, 9.5) Известно, что одним из корней уравнения

$$x^2 - 4a^2b^2x = 4$$

является  $x_1 = (a^2 + b^2)^2$ . Найдите  $a^4 - b^4$ .

5. («Физтех», 2019, 9.1) Даны квадратные трёхчлены  $f_1(x) = x^2 - ax - 3$ ,  $f_2(x) = x^2 + 2x - b$ ,  $f_3(x) = 3x^2 + (2 - 2a)x - 6 - b$  и  $f_4(x) = 3x^2 + (4 - a)x - 3 - 2b$ . Пусть разности корней равны соответственно  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Известно, что  $|C| \neq |D|$ . Найдите отношение  $\frac{A^2 - B^2}{C^2 - D^2}$ . Значения  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $a$ ,  $b$  не заданы.

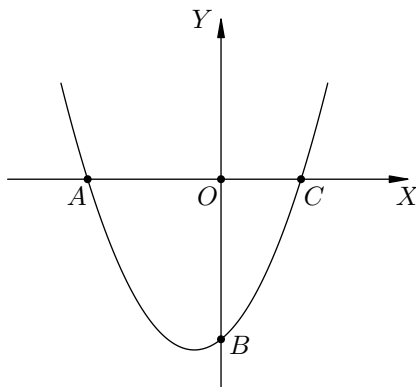
6. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9.8) Пусть  $x_1$ ,  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 - x - 3 = 0$ . Найдите

$$(x_1^5 - 20)(3x_2^4 - 2x_2 - 35).$$

7. («Физтех», 2019, 10.1) Дана линейная функция  $f(x)$ . Известно, что расстояние между точками пересечения графиков  $y = x^2 - 1$  и  $y = f(x)$  равно  $\sqrt{30}$ , а расстояние между точками пересечения графиков  $y = x^2$  и  $y = f(x) + 3$  равно  $\sqrt{46}$ . Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций  $y = x^2 - 1$  и  $y = f(x) + 1$ .

### 3 Квадратный трёхчлен. Парабола

8. (Всеросс., 2014, МЭ, 9.2) На рисунке изображён график функции  $y = x^2 + ax + b$ . Известно, что прямая  $AB$  перпендикулярна прямой  $y = x$ . Найдите длину отрезка  $OC$ .



9. (Олимпиада КФУ, 2020, 9.1) График функции  $y = ax^2 + bx + c$  пересекает оси координат в трех различных точках. Докажите, что треугольник с вершинами в этих точках является прямоугольным тогда и только тогда, когда  $ac = -1$ .

10. (Всеросс., 2012, МЭ, 10.2) Прямая пересекает график функции  $y = x^2$  в точках с абсциссами  $x_1$  и  $x_2$ , а ось абсцисс — в точке с абсциссой  $x_3$ . Докажите, что  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}$ .

11. («Физтех», 2017, 9–11.1) Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция  $f(x)$  принимает значения 13, 13 и 35 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение  $f(x)$ .

### 4 Разное

12. (Всеросс., 2019, РЭ, 9.1) Два приведённых квадратных трёхчлена  $f(x)$  и  $g(x)$  таковы, что каждый из них имеет по два корня, и выполняются равенства  $f(1) = g(2)$  и  $g(1) = f(2)$ . Найдите сумму всех четырёх корней этих трёхчленов.