

Игры и стратегии

1 Игры-шутки

1. Двое по очереди ломают плитку шоколада размером 4×7 . За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает: первый или второй?
2. («Надежда энергетики», 2023, 5.3) Теннисист и бадминтонист устали от спортивных турниров и решили устроить математический поединок. Они выписали в ряд числа от 25 до 57 включительно и условились по очереди ставить между ними знаки «+» или «-» (в произвольном месте и в произвольном порядке, но только эти знаки). Если ответ полученного выражения (когда все знаки между числами будут расставлены) окажется четным, то победит теннисист, а если нечетным — бадминтонист. Есть ли у одного из них (или у обоих) выигрышная стратегия, то есть такая последовательность действий, которая приводит к победе независимо от действий соперника?
3. (Турнир Архимеда, 2014.3) Маша и Катя играют в такую игру: по очереди обрывают лепестки у ромашки с 64 лепестками. За один ход разрешается сорвать любое нечётное количество лепестков, меньше 16, причем запрещается повторять уже сделанные ходы. (Например, если Катя при своём ходе сорвёт 3 лепестка, то в дальнейшем ни Маша, ни Катя сорвать 3 лепестка не имеют права.) Выигрывает тот, кто сорвёт последний лепесток. Начинает Маша. Кто из них выиграет, как бы ни играл соперник?
4. (Математический праздник, 2019, 7.4) Имеется три кучки по 40 камней. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход надо объединить две кучки, после чего разделить эти камни на четыре кучки. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто из играющих (Петя или Вася) может выиграть, как бы ни играл соперник?
5. (Открытая олимпиада, 2015, 8.3) Петя, Вася и Тёма играют в игру. Первым ходит Петя, затем Вася, потом Тёма, затем снова Петя и т.д. Изначально на доске было написано число $123456789 \dots 123456789$ (последовательность 123456789 повторяется 2015 раз). Своим ходом каждый игрок может стереть одну из цифр написанного на доске числа и прибавить её к получившемуся числу. Игра заканчивается, когда на доске остаётся одна цифра. Петя выигрывает, если это цифра 1, 4 или 7, Вася — если 2, 5 или 8, в остальных случаях выигрывает Тёма. Кто выигрывает при правильной игре?
6. (Олимпиада Эйлера, РЭ, 2020.4) На полуокружности расположены 50 точек. Любые две точки, между которыми не более 9 других точек, соединены отрезком. Степенью точки назовём количество отрезков, выходящих из неё. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. Панда своим ходом может стереть один отрезок, соединяющий точки, сумма степеней которых чётна. Вомбат может своим ходом стереть один отрезок, соединяющий точки, сумма степеней которых нечётна. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из зверей выиграет при правильной игре?

7. (*Всесиб.*, 2023, 10.2) Вася и Петя играют в «Бери или дели». В этой игре сначала есть одна большая куча камней. Каждым ходом очередной игрок либо делит одну из уже имеющихся к моменту его хода куч любым способом на две меньших, либо забирает одну из уже имеющихся куч. Выигрывает игрок, после хода которого камней на поле вообще не останется. Игроки делают ходы по очереди, первым ход делает Вася, но этим и только этим ходом он не имеет права забрать всю кучу сразу. Кто из них победит в этой игре? Замечание: куча может содержать всего один камень.

2 Симметричная стратегия

8. На столе лежат две стопки монет: в одной из них 30 монет, а в другой — 20. За ход разрешается взять любое количество монет из одной стопки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

9. Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

10. В ряд лежат 25 монет. За ход разрешается брать одну или две рядом лежащие монеты. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто побеждает?

11. (*Турнир Архимеда*, 2013.6) Вася и Коля играют в игру: закрашивают клетки квадратной доски 4×4 . Первым ходит Вася, затем Коля, затем снова Вася и так далее, до тех пор, пока не окажется окрашенным какой-нибудь квадрат 2×2 . Кто закрасил последнюю клетку в таком квадрате, тот и проиграл. Кто из мальчиков сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

12. («*Формула Единства*» / «*Третье тысячелетие*», 2017, 5.3) Двое играют в такую игру. Они по очереди называют трёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: 351 — 189 — 936 — 621... Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

13. («*Формула Единства*» / «*Третье тысячелетие*», 2017, 6.3, 9.2, 11.1) Двое играют в такую игру. Они по очереди называют четырёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: 3231 — 1539 — 9756 — 6561... Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

14. («*Формула Единства*» / «*Третье тысячелетие*», 2017, 7.4) Двое играют в такую игру. Они по очереди называют восьмизначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее. Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

15. («Ломоносов», 2017, 5–6.6, 7–8.7, 9.5) Петя и Вася играют в игру. На доске написано число:

11223334445555666677777.

За один ход разрешается стереть любое количество одинаковых цифр. Выигрывает тот, кто сотрёт последнюю цифру. Петя ходит первым. Может ли он так ходить, чтобы гарантированно выиграть?

16. (Московская устная олимпиада, 2015, 6.7) Придя в школу, Коля и Алиса обнаружили на доске надпись

ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА.

Они договорились сыграть в следующую игру: за один ход в этой надписи разрешается стереть произвольное количество одинаковых букв, а выигрывает тот, кто стирает последнюю букву. Первым ходил Коля и стёр последнюю букву А. Как надо играть Алисе, чтобы обеспечить себе выигрыш?

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2023, 7–8.6, 9.5) Алиса и Боря по очереди зачёркивают буквы в надписи «Покори Воробьёвы горы». За ход разрешается зачеркнуть одну букву или несколько одинаковых букв (большие и маленькие буквы не различаются). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Алиса ходит первой. Есть ли у одного из игроков стратегия, гарантированно позволяющая выиграть?

18. («Бельчонок», 2021, 10.1) В прямоугольнике 27×72 , разбитом на клетки 1×1 , двое игроков ходят по очереди, закрашивая квадраты любого размера, в которых ещё нет закрашенных клеток. Можно закрашивать и квадрат 1×1 , то есть 1 клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто всегда может выиграть, первый или второй?

19. («Ломоносов», 2022, 10.4) По окружности выписаны 2022 единицы. Два игрока ходят по очереди: за один ход игрок стирает два соседних числа из написанных и пишет вместо них их сумму (один раз). Выигрывает тот, кто получит число 4. Если в конце игры остаётся одно число, не равное 4, игра оканчивается вничью. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе победу, и если да, то каким образом?

3 Выигрышные и проигрышные позиции

20. На столе лежат 12 спичек. За один ход разрешается взять одну или две спички. Выигрывает тот, кто берет последнюю спичку. Кто выиграет при правильной игре — первый или второй?

21. («Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 11.8) Два игрока по очереди выкладывают монеты в ряд. За один ход можно положить две или три монеты. Выигрывает тот, кто выложит 16 монету. Определите, какой игрок (первый или второй) обладает стратегией, которая позволит ему выиграть вне зависимости от ходов другого игрока. Опишите эту стратегию.

22. («Бельчонок», 2020, 9.1) В тетради написаны буквы русского и английского алфавитов, всего вместе 59 букв. Артём и Надя по очереди вычеркивают буквы, причём за раз можно вычеркнуть или 1, или 2, или 8, или 9 букв. Тот, кто не сможет сделать ход, проигрывает. Начинает Артём. Кто из них может выиграть при любых ходах другого, и как ему надо вычеркивать буквы?

23. (*Открытая олимпиада, 2017, 9.3*) На доске написано число 2017. Петя и Вася играют в следующую игру: за один ход можно вычесть из написанного на доске числа любой его натуральный делитель, кроме него самого, и записать результат этого вычитания на доске вместо исходного числа. Начинает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

24. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 10.7*) Иван и Петр играют в следующую игру. Из кучки, которая содержит 2018 камней, они по очереди берут некоторое количество камней. Если перед ходом в кучке имеется N камней, то игрок может взять k камней, только если k является делителем числа N . Проигрывает тот игрок, который возьмет последний камень. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым берет камни Иван?

25. (*Всеросс., 2023, МЭ, 11.5*) Юра и Яша играют в следующую игру, делая ходы по очереди. Первым ходит Юра.

Изначально на доске написано число n . Игрок в свой ход может прибавить к числу на доске любой его натуральный делитель, стереть старое число и записать новое. (Например, если на доске написано число 12, то можно его стереть и написать одно из чисел 13, 14, 15, 16, 18, 24.)

Рассмотрим все возможные натуральные значения n от 2 до 59 включительно.

1. Для скольких из них Юра имеет выигрышную стратегию, если **проигрывает** тот, кто получит после своего хода число, не меньше 60?
2. Для скольких из них Юра имеет выигрышную стратегию, если **побеждает** тот, кто получит после своего хода число, не меньше 60?

26. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.7*) На столе лежат 2021 красных и 2022 зелёных камня. Аня и Петя делают ходы по очереди. Аня ходит первой. При каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет n камней этого цвета, где число n должно быть делителем текущего числа камней другого цвета. Кто возьмёт последний камень, тот выигрывает. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?

27. (*«Бельчонок», 2020, 9.1*) Перед двумя бельчатами, которых зовут Рыжик и Дымок, две кучи орехов, в одной 47 орехов, в другой 74 ореха. Рыжик может взять себе любую кучу орехов, а другую кучу поделить на две части. Потом то же самое сделает Дымок с кучами, которые образовались. И дальше они по очереди берут себе одну кучу, а вторую делят на две части. Выигрывает тот, кто сделает это последним. Кто из них может выиграть при любых ходах другого, и как ему надо действовать?

28. (*Всесиб., 2017, 8.2*) Однажды Алексей и Данил играли в такую игру. Если на доске записано некоторое число x , то его можно стереть, а вместо него записать $2x$ или $x - 1000$. Проигрывает тот, кто получил число не больше 1000 или не меньше 4000. Оба игрока стремятся победить. В какой-то момент ребята перестали играть. Кто проиграл, если первым числом было 2017?

4 Различные стратегии

29. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 5.3, 6.3) Двое играют в игру. Первый игрок пишет на пустой доске произвольное натуральное число, не кратное 10. Дальше игроки по очереди (начиная со второго) пишут на доске какую-нибудь степень любого из чисел, написанного на доске. (Например, если на доске написаны числа 3 и 81, то можно написать любое из чисел $3 = 3^1$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, $243 = 3^5$ и т. д., а также $81 = 81^1$, $6561 = 81^2$ и т. д.) Выигрывает тот из игроков, после хода которого сумма каких-нибудь чисел, написанных на доске, делится на 10. У кого из игроков есть способ выиграть при любой игре соперника? Как он должен действовать?

30. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 8.4, 10.1) На доске написано число 2. Двое играют в игру, делая ходы по очереди: каждый из игроков своим ходом может написать на доске любую степень двойки (то есть число вида 2^k , $k \geq 1$). Игрок, после хода которого на доске появятся две одинаковые цифры, проигрывает. У кого из игроков (у того, кто начинает, или у его соперника) есть способ выиграть при любой игре другого? Как он должен действовать?

31. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 7.2) Петя и Вася играют в игру. У них есть полоска из 9 клеток. Каждым ходом игрок вписывает любую цифру в любую свободную клетку. Ходят по очереди, начинает Петя. Если в конце игры полученное число окажется точным квадратом, то выигрывает Петя, иначе — Вася. При этом они считают, что число может начинаться с одного или нескольких нулей. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

32. (Всесиб., 2020, 7.4) Петя и Волк играют в игру. Изначально на доске написано число 0, каждым ходом написанное число нужно увеличить на 2, 3, 8 или 9. Ходы делаются по очереди, первым ходит Петя. Выигрывает тот, после чьего хода получится число, кратное 2020. Кто может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

33. (Математический праздник, 2014, 7.6) На доске записаны два числа: 2014 и 2015. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно

— либо уменьшить одно из чисел на его ненулевую цифру или на ненулевую цифру другого числа;

— либо разделить одно из чисел пополам, если оно чётное.

Выигрывает тот, кто первым напишет однозначное число. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

34. (Всеросс., 2023, 3Э, 11.5) Изначально на доске написано 10 единиц. Гриша и Глеб играют в игру, делая ходы по очереди. Своим ходом Гриша возводит некоторые 5 чисел на доске в квадрат. Глеб своим ходом выбирает несколько (возможно, ни одного) чисел на доске и увеличивает каждое из них на 1. Если в течение 10 000 ходов на доске появится число, делящееся на 2023, то побеждает Глеб, иначе побеждает Гриша. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым ходит Гриша?