

Функции в уравнениях и неравенствах

1 Соображения монотонности

1. («Покори Воробьёвы горы!», 2010.3) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{16}} x \geq -2^{-x}.$$

[7:0]

2. («Покори Воробьёвы горы!», 2016.2) Решите уравнение

$$x + \log_2 x - \log_3 x + \log_4 x - 7 = \left(\frac{3}{4} - \log_3 \sqrt{2}\right) \cdot \log_2 49.$$

[2]

3. («Ломоносов», 2012, 10–11.1) Найдите первый член арифметической прогрессии a_1, a_2, \dots , если $a_{13} = 0$, а произведение чисел $5^{a_1}, 5^{a_2}, \dots, 5^{a_{24}}$ равно их среднему арифметическому.

[0]

4. («Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 11.5) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x = \sqrt{y}, \\ 2^{-y} = x^3. \end{cases}$$

[8 = 8:2/1 = x]

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.3) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} 3^{\sqrt{x}} - 3^{2\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{y} - \sqrt{x}, \\ x^2 + y^2 \leq 9 + 2xy. \end{cases}$$

[2:3]

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.3) Решите уравнение

$$x - \sqrt{x} \cdot 2^{-x^6} = 2^{1-2x^6}.$$

[1]

7. («Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 11.2) Решите уравнение

$$\left(\sqrt{2023} + \sqrt{2022}\right)^x - \left(\sqrt{2023} - \sqrt{2022}\right)^x = \sqrt{8088}.$$

[1 = x]

8. («Физтех», 2022, 11.3) Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

$$[9; 0) \cap (81; +\infty)$$

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11.2) Найти все пары вещественных чисел (x, y) , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})^x = 3^y + 4^y, \\ \sqrt{-x^2 - 3xy - y^2} = 2y + \frac{x}{2}. \end{cases}$$

$$\frac{7}{11} = y; 1 = x$$

10. («Физтех», 2023, 11.5) Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

$$\frac{9}{11}$$

11. («Ломоносов», 2016, 10–11.5) Найдите все решения неравенства

$$\left(\log_{\frac{\pi}{6}}(2x - 5) - \log_{\frac{\pi}{6}}(7 - 2x) \right) \left(\cos \left(x + \frac{7}{4} \right) - \cos(2x - 1) \right) (|x - 4| - |2x - 5|) \geq 0.$$

$$\{ \frac{1}{6} \} \cap \left[\frac{1}{11}; \frac{7}{6} \right)$$

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.1) Решите уравнение

$$\lg(-x^3 - x) = \log_2 |x|.$$

$$7 = x$$

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2015.4) Найдите произведение корней уравнения

$$\log_{5+\sqrt{15}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{5-\sqrt{15}}(12 + 2x - x^2).$$

$$\frac{91}{\sqrt{15} - 2}$$

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2012.4) Решите уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3).$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{11+4\sqrt{3}}}$$

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11.5) Решите неравенство

$$x + \sqrt{x^2 + 4} \geq \left(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 4x + 2} \right) \cdot 8^{x+1}.$$

$$\left[\frac{5}{2}; +\infty \right)$$

2 Соображения выпуклости

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2021, 10–11.3) Сколько корней имеет уравнение

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}?$$

7

17. («Ломоносов», 2016, 10–11.6) Найдите произведение всех значений x , при каждом из которых

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}, \quad 2^{x^2-9x+11}, \quad \left(\sqrt{4+\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}$$

— арифметическая прогрессия.

66

18. («Ломоносов», 2006.10) Решите неравенство

$$(1 - \operatorname{ctg} x)^{2006} + 4(1 + \operatorname{ctg} x)^{2004} \leq 2^{2006}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \in \left[u\pi + \frac{\pi}{2x}, u\pi + \frac{\pi}{x} \right]$$

3 Неравенства и оценки

19. («Физтех», 2008.5) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y^2 - y^4 = e^x, \\ \arccos x + 2 \operatorname{arctg} y = 0. \end{cases}$$

(1-0)

20. («Физтех», 2008.5) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^4 - 4x^2 + y = \ln y, \\ \arcsin x + \operatorname{arctg} y = 0. \end{cases}$$

(1, $\frac{\pi}{4}$ -)

21. («Физтех», 2023, 11.3) Решите неравенство

$$\ln^2 x - (x-1) \ln(2x) + (\ln 2) \ln x \geq 0.$$

{1} \cap [\frac{\pi}{4}; 0) \ni x

4 Разные задачи

22. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.2) Решите неравенство

$$\sqrt{4x+1-12\sqrt{x-2}} + \sqrt{4x+8-16\sqrt{x-2}} \leq \log_{\frac{1}{4}} \left(x - \frac{17}{4} \right).$$

$\left[\frac{5}{6}; \frac{5}{21} \right)$

23. (ОММО, 2019.5) Обозначим $f(x) = 9x^2 + 8x - 2$. Решите уравнение $f(f(x)) = x$.

$\frac{9}{81^{\wedge} \mp \varepsilon} - \frac{6}{2} \cdot \Gamma$

24. (ОММО, 2010.5) Решите уравнение $f(f(x)) = f(x)$, где $f(x) = \sqrt[5]{3 - x^3 - x}$.

Γ

25. (Всеросс., 2018, 3Э, 10.1) Найдите количество корней уравнения

$$|x| + |x+1| + \dots + |x+2018| = x^2 + 2018x - 2019.$$

\mathcal{Z}