Доказательство от противного. Принцип Дирихле

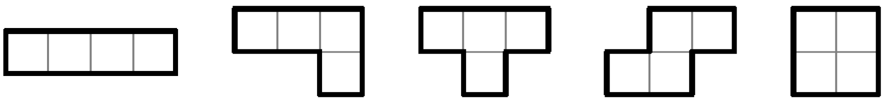
1 Доказательство от противного

1. (*«Надежда энергетики», 2024, 5.1*) На конкурсе «Лучший гном» вручают награды в разных номинациях. Всего у жюри 29 наград. Докажите, что из семи гномов найдутся два гнома, которые получили одинаковое количество призов от жюри (оба также могут получить и ни одного приза).

2. (*«Надежда энергетики», 2023, 6.2*) На слёт любителей мадагаскарских руконожек приехало 23 человека, и некоторые из них подружились между собой. Докажите, что найдутся два участника слёта, которые подружились с одинаковым числом коллег.

3. (*Московская устная олимпиада, 2023, 6.4*) Серёжа выписал все натуральные числа от 1 до N и заметил, что ровно 40% из них начинаются с единицы. Докажите, что и N начинается с единицы.

4. (*«Курчатов», 2022, 6.5*) Клетчатый прямоугольник 42×44 разрезали по линиям сетки на прямоугольники 1×8, один квадрат 2×2 и одну тетраминошку. Докажите, что эта тетраминошка тоже является квадратом. (Все возможные тетраминошки изображены на рисунке ниже, их можно поворачивать и переворачивать.)



5. (*Московская устная олимпиада, 2021, 6.7*) Девять математиков встретились на международной конференции и обнаружили, что среди любых трёх из них по крайней мере двое говорят на одном языке. Известно, что каждый математик говорит не более чем на трёх языках. Докажите, что хотя бы трое из девяти говорят на одном и том же языке.

6. (*Всесиб., 2018, 7.2*) Квадрат со стороной 6 клеточек разрезан по сторонам сетки на 8 прямоугольников. Докажите, что какие-то два из этих прямоугольников равны по площади.

7. (*Открытая олимпиада, 2020, 7.4*) Отрезок длины 11 разделили на пять отрезков с натуральными длинами. Докажите, что из каких-то трёх можно составить треугольник.

8. (*Всесиб., 2020, 7.5*) В кружке занимались 50 школьников, которые иногда ходили на занятия. Оказалось, что любые два школьника встретились на каком-либо занятии ровно один раз. Кроме того, известно, что ни на одно занятие не приходили все школьники одновременно. Докажите, что есть школьник, который был хотя бы на 8 занятиях.

9. (*САММАТ, 2023, 8.6*) Среди чисел от 1 до 500 выбрали 430. Докажите, что произведение каких-то двух делится на 35.

10. (*ММО, 2015, 8.4*) Будем называть натуральное число *почти квадратом*, если это либо точный квадрат, либо точный квадрат, умноженный на простое число. Могут ли 8 почти квадратов идти подряд?

11. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2010.4*) Даны натуральные числа a и b, причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

12. Докажите, что медиана треугольника, проведенная из вершины тупого (острого) угла, меньше (больше) половины стороны, к которой она проведена.

13. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2016.8*) Точки M и N — середины биссектрис AK и CL треугольника ABC соответственно. Докажите, что угол ABC прямой тогда и только тогда, когда $\angle MBN = 45°$.

14. (*Всеросс., 2018, МЭ, 9.1*) Игорь сложил десять подряд идущих натуральных чисел, затем разделил полученную сумму на сумму следующих десяти натуральных чисел. Могло ли у него получиться число 0,8?

15. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 9.5, 10.5*) Дан выпуклый 37-угольник, у которого все углы выражаются целым числом градусов. Докажите, что среди углов имеются хотя бы три одинаковых.

16. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 10.3*) Числа от 1 до 50 написаны на карточках. Можно ли разложить эти карточки в 11 мешков (чтобы в каждый мешок попала хотя бы одна карточка) так, чтобы в каждом мешке произведение чисел на карточках делилось на 9?

17. (*Всеросс., 2014, РЭ, 10.1*) Ученик за одну неделю получил 17 оценок (каждая из них — 2, 3, 4 или 5). Среднее арифметическое этих 17 оценок — целое число. Докажите, что какую-то оценку он получил не более двух раз.

18. (*Всеросс., 2020, РЭ, 10.2, 11.2*) Множество A состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Множество B также состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Докажите, что найдётся число, которое принадлежит как множеству A, так и множеству B.

19. (*«Бельчонок», 2021, 10.1*) Пусть a, b, c, d положительны, $a < c$, $d < b$. Докажите, что уравнения $x^6 + ax + b = 0$ и $x^6 + cx + d = 0$ не имеют общих корней.

2 Принцип Дирихле

20. (*Турнир городов, 1989, 7–8*) Докажите, что из любых семи натуральных чисел (не обязательно идущих подряд) можно выбрать три числа, сумма которых делится на 3.

21. (*Турнир городов, 1990, 10–11; Московская мат. регата, 2011, 7*) Десять друзей послали друг другу праздничные открытки, так что каждый послал пять открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.

22. (*«Надежда энергетики», 2019, 5.3, 6.3*) Винтик и Шпунтик проектировали нановездеход. Винтик начертил прямоугольник и наметил в нем двадцать отверстий для колес. Шпунтик разделил прямоугольник на отсеки, начертив две линии, параллельные одной стороне прямоугольника, и еще две, параллельные другой. При этом ни одно отверстие Винтика не попало на линии Шпунтика. Докажите, что обязательно найдется отсек с тремя или более отверстиями.

23. (*«Надежда энергетики», 2019, 7.3*) Винтик и Шпунтик проектировали нановездеход. Винтик начертил прямоугольник 9×11 см и отметил в нем двести точек — мест под заклепки. Шпунтик разлиновал прямоугольник на квадратные отсеки со стороной 1 см. При этом ни одна пометка Винтика не попала на линии Шпунтика. Докажите, что обязательно найдется отсек, на который приходится три или более заклепки.

24. (*«Надежда энергетики», 2022, 7.2*) Верно ли, что среди любых восьми целых чисел можно выбрать два, разность которых кратна семи?

25. (*«Надежда энергетики», 2022, 8.3*) Верно ли, что среди любых 2022 целых чисел можно выбрать два, разность которых кратна 2021?

26. (*«Курчатов», 2020, 8.2*) У квадрата 5×5 есть 5 столбцов, 5 строк и 18 диагоналей, включая диагонали длины один. В каждой клетке этого квадрата Вова написал число 1, 3, 5 или 7, а Лёша посчитал сумму чисел по каждому столбцу, строке и диагонали. Докажите, что среди полученных Лёшей сумм есть хотя бы две равные.

27. (*Турнир городов, 2015, 10–11.2*) Ковёр имеет форму квадрата со стороной 275 см. Моль проела в нем четыре дырки. Можно ли гарантированно вырезать из ковра квадратный кусок со стороной 1 м, не содержащий дырок? Дырки считайте точечными.

28. (*Турнир Ломоносова, 2017.6*) В классе 28 учеников. На уроке программирования они делятся на три группы. На уроке английского языка они тоже делятся на три группы, но по-другому. И на уроке физкультуры они делятся на три группы каким-то третьим способом. Докажите, что найдутся хотя бы два ученика, которые на всех трёх занятиях находятся друг с другом в одной группе.

29. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 10.7*) В конференции принял участие 281 сотрудник из 7 различных филиалов фирмы. В каждой группе из шести участников конференции по меньшей мере двое были одного возраста. Докажите, что среди всех участников можно найти пятерых одного возраста, одного пола и из одного филиала фирмы.

30. (*«Бельчонок», 2022, 11.2*) Каждый из 8 бельчат бросил шишку в какого-нибудь другого бельчонка, независимо от других. Докажите, что всегда найдётся группа из трёх бельчат, которые не бросили шишку в бельчонка из этой группы.