

## Делимость. НОД и НОК

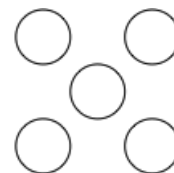
### 1 Делимость. Общие свойства

1. (Московская устная олимпиада, 2014, 6.1) Сумма трёх различных наименьших делителей некоторого числа  $A$  равна 8. На сколько нулей может оканчиваться число  $A$ ?

2. (Математический праздник, 2016, 6.1) У Незнайки есть пять карточек с цифрами:  $\boxed{1}$ ,  $\boxed{2}$ ,  $\boxed{3}$ ,  $\boxed{4}$  и  $\boxed{5}$ . Помогите ему составить из этих карточек два числа — трёхзначное и двузначное — так, чтобы первое число делилось на второе.

3. (Всеросс., 2014, МЭ, 6.2) Второклассники Коля, Вася, Миша, Стёпа и Гриша по очереди верно решили пять примеров из таблицы умножения. Каждый следующий мальчик получил ответ в полтора раза больше предыдущего. Какие числа умножал Стёпа?

4. (Математический праздник, 2015, 6.2) а) Впишите в каждый кружочек по цифре, отличной от нуля, так, чтобы сумма цифр в двух верхних кружочках была в 7 раз меньше суммы остальных цифр, а сумма цифр в двух левых кружочках — в 5 раз меньше суммы остальных цифр.



б) Докажите, что задача имеет единственное решение.

5. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 5.4, 6.3) В классе учатся 28 человек. На 8 марта каждый мальчик подарил каждой девочке один цветок — тюльпан, розу или нарцисс. Сколько было подарено роз, если известно, что их в 4 раза больше, чем нарциссов, но в 3 раза меньше, чем тюльпанов?

6. (Математический праздник, 2012, 6.3) Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?

7. (Математический праздник, 2008, 6.3) На складе лежало несколько целых головок сыра. Ночью пришли крысы и съели 10 головок, причём все ели поровну. У нескольких крыс от обжорства заболели животы. Остальные 7 крыс следующей ночью доели оставшийся сыр, но каждая крыса смогла съесть вдвое меньше сыра, чем накануне. Сколько сыра было на складе первоначально?

8. (Всеросс., 2020, ШЭ, 7.3) На уроке физкультуры весь класс выстроился по росту (у всех детей разный рост). Дима заметил, что людей, которые выше него, в четыре раза больше, чем людей, которые ниже него. А Лёня заметил, что людей, которые выше него, в три раза меньше, чем людей, которые ниже него. Сколько всего человек в классе, если известно, что их не больше 30?

9. («Надежда энергетики», 2016, 7.1) Установок трёх типов всего не менее 100. Установок типа 2 в 4 раза больше, чем типа 1, число установок типа 3 кратно числу установок типа 1. Если бы установок типа 3 было в 5 раз больше, то их было бы на 22 больше, чем установок типа 2. Найдите число установок каждого типа.

10. (*Всеросс., 2017, МЭ, 7.2*) Вчера Никита купил несколько ручек: чёрные — по 9 рублей за штуку и синие — по 4 рубля за штуку. Зайдя сегодня в тот же магазин, он обнаружил, что цены на ручки изменились: чёрные стали стоить 4 рубля за штуку, а синие — 9 рублей. Увидев такое, Никита сказал с досадой: «Покупай я те же ручки сегодня, сэкономил бы 49 рублей». Не ошибается ли он?
11. (*Московская устная олимпиада, 2002, 7.2*) Существуют ли такие цифры Г и У, что число УГУ делится на 13, а число ГУГ — не делится?
12. (*САММАТ, 2021, 8.1*) Доказать, что каждое число вида  $n^4 + 64$  является составным при всех натуральных  $n > 2$ .
13. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 9.1*) Докажите, что для любого натурального  $n$  число  $n^3 + 6n^2 + 12n + 16$  составное.
14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.4, 7–8.3*) Докажите, что сумма 6-значных чисел, не содержащих цифр 0 и 9 в десятичной записи, будет кратна 37.
15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.5, 7–8.3, 9.2*) Коля решил проверить свое знание четырех арифметических действий. Он взял два натуральных числа и нашел их сумму. Потом нашел разность этих чисел — первое число минус второе. Потом нашел произведение этих же чисел. Потом частное от деления первого числа на второе. Сложив все 4 полученных результата Коля получил 153. Найдите два числа, над которыми производились действия.

## 2 Признаки делимости

16. (*«Курчатов», 2015, 6.3*) В шестизначном числе первую и последнюю цифру заменили звёздочками: \*2015\*. Известно, что число делится на 72. Восстановите число.
17. (*Математический праздник, 2003, 7.1*) Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф.
18. (*Математический праздник, 2004, 7.1*) Ваня задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух?
19. (*Математический праздник, 2002, 6.3*) На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2002. Какие числа остались на доске?
20. (*Математический праздник, 2011, 7.5*) В справочнике «Магия для чайников» написано:  
 Замените в слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные — на разные. Если полученное число окажется простым, случится настоящее землетрясение.
- Возможно ли таким образом устроить землетрясение? (Натуральное число, большее 1, называется простым, если у него нет других делителей, кроме 1 и самого себя.)
21. (*Всеросс., 2021, МЭ, 8.2*) Вася заменил в двух числах одинаковые цифры одинаковыми буквами, разные — разными. Получилось, что число ЗАРАЗА делится на 4, а АЛМАЗ делится на 28. Найдите две последние цифры суммы ЗАРАЗА + АЛМАЗ.

### 3 Основная теорема арифметики

22. («Надежда энергетики», 2022, 5.2) В доме не один подъезд, и во всех подъездах одинаковое число этажей. Число квартир на каждом этаже одинаковое, оно меньше числа подъездов. А число подъездов меньше числа этажей. Всего в доме 165 квартир. Сколько в доме подъездов?

23. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 5.2, 6.2) Приведите пример таких целых чисел  $a$  и  $b$ , что  $ab(2a + b) = 2015$ .

24. (Всеросс., 2018, ШЭ, 6.1) В доме на всех этажах во всех подъездах равное количество квартир (больше одной). Также во всех подъездах поровну этажей. При этом количество этажей больше количества квартир на этаже, но меньше, чем количество подъездов. Сколько в доме этажей, если всего квартир 715?

25. (Математический праздник, 1999, 6.2) Укажите пять целых положительных чисел, сумма которых равна 20, а произведение — 420.

26. (Математический праздник, 2007, 6.2, 7.2) В конце четверти Вовочка выписал подряд в строчку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? («Колов» учительница пения не ставит.)

27. (Московская устная олимпиада, 2015, 6.2) Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие — втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 864 метра. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

28. (Математический праздник, 2008, 7.1) Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число.

29. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–8.4) Коробка с сахаром имеет форму прямоугольного параллелепипеда. В ней находится 280 кусочков сахара, каждый из которых — кубик размером  $1 \times 1 \times 1$  см. Найдите площадь полной поверхности коробки, если известно, что длина каждой из её сторон меньше 10 см.

### 4 НОД и НОК

30. (Всеросс., 2016, ШЭ, 8.1) Робинзон Крузо каждый второй день пополняет запасы питьевой воды из источника, каждый третий день собирает фрукты и каждый пятый день ходит на охоту. Сегодня, 13 сентября, у Робинзона тяжёлый день: он должен делать все эти три дела. Когда у Робинзона будет следующий тяжёлый день?

31. (Всеросс., 2019, ШЭ, 8.2) В мешке у Деда Мороза находятся меньше ста подарков для Пети, Вася, Бори и Лёши. Дед Мороз отдал половину подарков Пете, пятую часть — Васе, седьмую часть — Боре. Сколько подарков досталось Лёше?

32. («Бельчонок», 2020, 5.2) Когда открыли новый магазин игрушек, Таня зашла туда в первый же день, и потом заходила каждый день. Олег зашел во второй день, и дальше заходил каждый второй день. Дима заходил каждый третий день, Игорь каждый четвертый день, Оля каждый пятый день. На какой день работы магазина они впервые все побывают в магазине в один и тот же день?

- 33.** («Бельчонок», 2019, 5.4) На клетчатой бумаге начертили прямоугольник размером  $301 \times 215$  клеток и провели диагональ. Сколько клеток прямоугольника она пересекает по внутренним точкам?
- 34.** («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.2, 7–9.1) Найдите наименьшее натуральное  $N$  такое, что  $N + 2$  делится (без остатка) на 2,  $N + 3$  — на 3, ...,  $N + 10$  — на 10.
- 35.** («Бельчонок», 2020, 5.2) Доктор Пилюлькин провёл медосмотр коротышек — жителей Цветочного города. Все коротышки выстроились в ряд, а доктор каждому измерил температуру, каждого второго помазал йодом, каждого шестого — зелёнкой, и каждого седьмого — мазью от синяков. Каким по счёту был первый коротышка, которого доктор помазал и йодом, и зелёнкой, и мазью от синяков?
- 36.** («Бельчонок», 2019, 5.4) На клетчатой бумаге начертили прямоугольник размером  $259 \times 185$  клеток и провели диагональ. Сколько клеток прямоугольника она пересекает по внутренним точкам?
- 37.** («Физтех», 2014, 7–10) Какое наибольшее значение может быть у наибольшего общего делителя чисел  $11n + 6$  и  $23n + 5$ , если  $n$  — натуральное число?
- 38.** («Росатом», 2021, 8.2) На какое натуральное число можно сократить числитель и знаменатель обыкновенной дроби вида  $\frac{3n + 2}{5n - 7}$ ? При каких целых  $n$  это может произойти?