Да или нет?

1. (*Олимпиада КФУ, 2022, 5.1*) Антошка выкопал на огороде пять картошек. Все они весят по-разному. Могло ли оказаться так, что он сможет разделить все картошки как на две кучки одинакового веса, так и на три кучки одинакового веса? Кучка может состоять и из одной картошки. Обоснуйте свой ответ.

2. (*«Бельчонок», 2019, 5.5*) Существует ли число, у которого произведение суммы цифр на их количество равно 55?

3. (*«Бельчонок», 2022, 5.2*) Мама, папа и девять детей встали в ряд на прямой дорожке. Мама и папа стоят рядом на расстоянии 1 метра друг от друга. Могут ли дети встать так, что суммарное расстояние от всех детей до мамы равно суммарному расстоянию от всех детей до папы? Если да, приведите пример; если нет, объясните, почему.

4. (*Математический праздник, 2005, 6.5*) В числах `МИХАЙЛО` и `ЛОМОНОСОВ` каждая буква обозначает цифру (разным буквам соответствуют разные цифры). Известно, что у этих чисел произведения цифр равны. Могут ли оба числа быть нечётными?

5. (*Математический праздник, 2005, 7.2*) Можно ли расставить числа
а) от 1 до 7;
б) от 1 до 9
по кругу так, чтобы любое из них делилось на разность своих соседей?

6. (*Открытая олимпиада, 2018, 7.1*) Существуют ли четыре таких различных делящихся на 3 числа, что сумма любых трёх из них делится на четвёртое?

7. (*ММО, 2018, 8.1*) Существуют ли такие три попарно различных натуральных числа a, b и c, что числа $a+b+c$ и $a \cdot b \cdot c$ являются квадратами некоторых натуральных чисел?

8. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 7.1*) Существует ли число, имеющее ровно 8 натуральных делителей:

$$a < b < c < d < e < f < g < h,$$

такое что $a+b+c=d$ и $e+f+g=h$?

9. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 10.3*) Даны два уравнения $ax^2+bx+c=0$ и $cx^2+bx+a=0$, в которых все коэффициенты ненулевые. Оказалось, что они имеют общий корень. Верно ли, что $a=c$?

10. (*Открытая олимпиада, 2017, 8.4*) Даны три квадратных уравнения со старшим коэффициентом 3 и различными неотрицательными дискриминантами. Может ли дискриминант каждого из них являться корнем двух оставшихся уравнений?

11. (*Всеросс., 2015, МЭ, 8.1*) Графики трёх функций $y=ax+a$, $y=bx+b$ и $y=cx+d$ имеют общую точку, причём $a \neq b$. Обязательно ли $c=d$? Ответ обоснуйте.

12. (*Всеросс., 2018, МЭ, 8.3*) На координатной плоскости построены четыре прямые, уравнения которых имеют вид $y=kx+b$. Все коэффициенты и свободные члены — различные натуральные числа от 1 до 8. Могут ли эти 4 прямые разделить плоскость ровно на 8 частей?

13. (*САММАТ, 2021, 8.9*) В остроугольном треугольнике из одной вершины проведена биссектриса и высота. Может ли проведенная биссектриса быть больше в два раза проведенной высоты? Ответ объясните.

14. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2022.7*) Существует ли треугольник, у которого длины не совпадающих между собой медианы и высоты, проведенных из одной его вершины, соответственно равны длинам двух сторон этого треугольника?

15. (*ОММО, 2012.1*) На 100 мест за круглым столом посадили 50 мужчин и 50 женщин. Будем называть человека *довольным*, если у него есть сосед противоположного пола. Может ли отношение числа довольных мужчин к числу довольных женщин быть больше 1,9?

16. (*ОММО, 2011.2*) Ваня сдал три ЕГЭ. По русскому языку он набрал на 5 баллов меньше, чем по физике, а по физике — на 9 баллов меньше, чем по математике. Золотая рыбка, приснившаяся Ване, обещала выполнить любое количество желаний следующих видов:

1) прибавить по баллу за каждый экзамен;

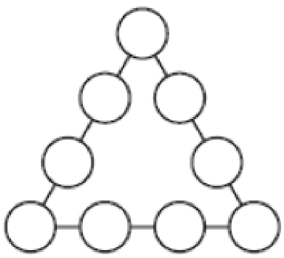
2) за один экзамен (по выбору Вани) уменьшить баллы на 3, а за каждый из двух остальных — увеличить на 1.

Рыбка выполняет желание, если при этом ни один результат не превысит 100 баллов. Мог ли Ваня во сне набрать 100 баллов более чем по одному экзамену?

17. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 6.3*) На доске написано число 20. За один ход разрешается либо удвоить число, либо стереть его последнюю цифру. Можно ли за несколько ходов получить число 25?

18. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 7.3*) На доске написано число 49. За один ход разрешается либо удваивать число, либо стирать его последнюю цифру. Можно ли за несколько ходов получить число 50?

19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.4*) Можно ли расставить числа 2016, 2017, ..., 2024 на указанные позиции (см. рисунок) так, чтобы сумма чисел, стоящих на каждой стороне треугольника, была одинаковой?



20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.7, 7–8.6, 9.5*) Можно ли так расставить знаки «+» и «−» на месте звездочек так, чтобы получилось верное равенство

$$* 1^2 * 2^2 * \ldots * 2020^2 = 2020?$$

21. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.1*) Вершины правильного 222-угольника покрасили в красный и синий цвет. Будем называть сторону одноцветной, если вершины покрашены в один цвет, и разноцветной, если они покрашены в разные цвета. Можно ли так раскрасить вершины, чтобы одноцветных и разноцветных сторон было поровну?

22. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.5*) Существуют ли три попарно различные натуральные числа a, b, c такие, что $a^{2023} + b^{2023} + c^{2023}$ является квадратом целого числа?

23. (*Турнир Архимеда, 2018.2*) Имеется 12 сосисок длиной 13 см каждая. Их требуется разделить между 13 котятами, 13 кошками и 13 котами так, чтобы каждому котёнку достался кусок сосиски длиной 3 см, каждой кошке — кусок сосиски длиной 4 см, а каждому коту — кусок сосиски длиной 5 см. Можно ли это сделать? (Сосиску режут поперёк.)

24. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 8.4*) На школьном спектакле все 25 мест в первом ряду заняты школьниками. Известно, что

- никакие две девочки в этом ряду не сидят рядом;
- рядом с каждым мальчиком сидит ещё хотя бы один мальчик;
- всего в первом ряду сидят 9 девочек.

Могло ли так оказаться, что на центральном месте в ряду сидит мальчик? (Ответ обоснуйте.)

25. (*«Высшая проба», 2014, 8.2, 9.1*) Известно, что ни одно из чисел a, b, c не является целым. Может ли случиться так, что каждое из чисел ab, bc, ca, abc — целое?

26. (*«Высшая проба», 2020, 8.3*) Имеется прямоугольный параллелепипед. Вася считает, что при увеличении каждого из его рёбер на 1 см полная поверхность параллелепипеда увеличится на 9 см^2, а объём увеличится на 5 см^3. Может ли он оказаться прав?

27. (*ММО, 2014, 8.3*) Натуральные числа от 1 до 2014 как-то разбили на пары, числа в каждой из пар сложили, а полученные 1007 сумм перемножили. Мог ли результат оказаться квадратом натурального числа?

28. (*ММО, 2015, 8.4*) Будем называть натуральное число *почти квадратом*, если это либо точный квадрат, либо точный квадрат, умноженный на простое число. Могут ли 8 почти квадратов идти подряд?

29. (*«Бельчонок», 2021, 5.4*) На день рождения бельчонок Вася получил мешок с орехами и начал есть их вместе с друзьями Димой, Гошей и Лёшей. Дима съел меньше всех орехов, а Гоша — больше всех. Лёша съел чётное число орехов, в 3 раза больше, чем Дима и в 2 раза меньше, чем Гоша. Все остальные орехи съел Вася. Могло ли в мешке быть 65 орехов?

30. (*«Бельчонок», 2022, 5.5*) На детском празднике было 8 детей. Взрослые приготовили 16 пакетов с конфетами. В первом была 1 конфета, во втором 2 конфеты, и так далее, в 16-м пакете было 16 конфет. Каждому из восьми детей дали по одному пакету в начале праздника и по одному пакету в конце праздника. Могло ли оказаться так, что каждому ребёнку досталось поровну конфет, причём в начале и в конце праздника было роздано одинаковое количество конфет?

31. (*«Надежда энергетики», 2021, 5.5*) Пусть имеется 2021 целое число, их произведение равно 1. Может ли сумма всех этих чисел быть равной нулю?

32. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 7.2*) Три медвежонка делили три кусочка сыра массой 10 г, 12 г и 15 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно откусить и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить медвежатам равные кусочки сыра?

33. (*Турнир Архимеда, 2012.4*) Можно ли вычеркнуть одно из натуральных чисел от 1 до 9, а оставшиеся числа расставить в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на каждой грани куба были равны между собой, но не были кратны вычеркнутому числу?

34. (*Турнир городов, 2015, 8–9.1*) Есть 99 палочек с длинами 1, 2, 3, …, 99. Можно ли из них сложить контур какого-нибудь прямоугольника?

35. (*«Высшая проба», 2022, 8.5*) Имеется 111 палочек длин 1, 2, 3, …, 111. Их выкладывают по кругу в некотором порядке. Обязательно ли найдутся лежащие подряд три палочки, из которых можно сложить треугольник?

36. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 5.1, 6.1, 7.1*) За один ход можно либо прибавить к числу одну из его цифр, либо вычесть из него одну из его цифр (например, из числа 142 можно получить $142 + 2 = 144$, $142 - 4 = 138$ и несколько других чисел).

а) Можно ли за несколько ходов получить из числа 2020 число 2021?

б) Можно ли за несколько ходов получить из числа 1000 число 2021?