

## Целая и дробная части

### 1 Вычисление целой и дробной части

1. (*Олимпиада КФУ, 2022, 9.2*) Найдите целую часть числа

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}.$$

2. (*«Ломоносов», 2023, 10.1*) Вычислите

$$\left[ \sqrt{45 - \sqrt{2023}} - \sqrt{45 + \sqrt{2023}} \right],$$

где  $[t]$  — это целая часть числа  $t$  (т. е. наибольшее целое число, не превосходящее  $t$ ).

3. (*«Ломоносов», 2019, 10–11.2*) Найдите целую часть числа  $a + \frac{9}{b}$ , где  $a$  и  $b$  — соответственно целая и дробная часть числа  $\sqrt{76 - 42\sqrt{3}}$ .

4. (*«Курчатов», 2022, 8.2*) Гоша ввел в калькулятор натуральное число. Затем он 3 раза совершил следующую операцию из двух действий: сначала извлек квадратный корень, а затем у полученного числа взял целую часть. В итоге у него получилось число 1. Какое наибольшее число мог изначально ввести Гоша?

Напомним, целая часть числа — это наибольшее целое число, не превосходящее данное.

5. (*«Росатом», 2017, 7.4*) Обозначим через  $[a]$  целую часть числа  $a$ , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее  $a$ . Область  $D$  на плоскости содержит точки  $M(x; y)$ , для которых координаты  $x, y$  удовлетворяют уравнению  $2[x + 1] + 3[y + 2] = 13$  и условию  $x \in [-2; 3]$ . Нарисовать область  $D$  на координатной плоскости и найти ее площадь.

6. (*«Надежда энергетики», 2020, 7.3*) На координатной плоскости выделен квадрат  $K$  с вершинами в точках  $(0, 0)$  и  $(10, 10)$ . Изобразите внутри этого квадрата множество  $M$  точек  $(x, y)$ , координаты которых удовлетворяют уравнению

$$[x] = [y],$$

где  $[a]$  обозначает целую часть числа  $a$  (то есть наибольшее целое число, не превосходящее  $a$ ; например,  $[10] = 10$ ,  $[9,93] = 9$ ,  $[1/9] = 0$ ,  $[-1,7] = -2$ ). Какую часть площади квадрата  $K$  составляет площадь множества  $M$ ?

7. (*«Надежда энергетики», 2020, 8.3*) На координатной плоскости выделен квадрат  $K$  с вершинами в точках  $(0, 0)$  и  $(10, 10)$ . Изобразите внутри этого квадрата множество  $M$  точек  $(x, y)$ , координаты которых удовлетворяют уравнению

$$[x] < [y],$$

где  $[a]$  обозначает целую часть числа  $a$  (то есть наибольшее целое число, не превосходящее  $a$ ; например,  $[10] = 10$ ,  $[9,93] = 9$ ,  $[1/9] = 0$ ,  $[-1,7] = -2$ ). Какую часть площади квадрата  $K$  составляет площадь множества  $M$ ?

## 2 Уравнения, неравенства, системы

8. (МЦНМО, 7) Решите уравнение

$$[x^3] + [x^2] + [x] = \{x\} - 1.$$

9. («Надежда энергетики», 2020, 9.2) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2[x_1] + x_2 = \frac{3}{2}, \\ 3[x_1] - 2x_2 = 4. \end{cases}$$

Здесь  $[a]$  означает целую часть числа  $a$ .

10. («Надежда энергетики», 2022, 6.2) Целой частью  $[x]$  числа  $x$  называется наибольшее целое  $m$  такое, что  $m \leq x$ . Например,  $[-4/3] = -2$ ,  $[\pi] = 3$ ,  $[2] = 2$ . Решите в целых числах уравнение

$$\left[ \frac{x}{2} \right] + \left[ \frac{x+1}{2} \right] = 2x + 4.$$

11. («Надежда энергетики», 2022, 7.5) Целой частью  $[x]$  числа  $x$  называется наибольшее целое  $m$  такое, что  $m \leq x$ . Например,  $[-4/3] = -2$ ,  $[\pi] = 3$ ,  $[2] = 2$ . Решите в целых числах уравнение

$$\left[ \frac{x}{10} \right] + \left[ \frac{x+1}{10} \right] + \dots + \left[ \frac{x+9}{10} \right] = x^2.$$

12. («Надежда энергетики», 2022, 8.4) Целой частью  $[x]$  числа  $x$  называется наибольшее целое  $m$  такое, что  $m \leq x$ . Например,  $[-4/3] = -2$ ,  $[\pi] = 3$ ,  $[2] = 2$ . Решите в целых числах уравнение

$$\left[ \frac{x}{2022} \right] + \left[ \frac{x+1}{2022} \right] + \dots + \left[ \frac{x+2021}{2022} \right] = x^{2022} + x - 1.$$

13. («Надежда энергетики», 2022, 9.2) Целой частью  $[x]$  числа  $x$  называется наибольшее целое  $m$  такое, что  $m \leq x$ . Например,  $[-4/3] = -2$ ,  $[\pi] = 3$ ,  $[2] = 2$ . Найдите все целочисленные решения данного уравнения, если таковые существуют.

$$\left[ \frac{x}{2022} \right] + \left[ \frac{x+1}{2022} \right] + \dots + \left[ \frac{x+2021}{2022} \right] = x^{2023}.$$

14. («Надежда энергетики», 2022, 10.3) Найдите все целочисленные решения данного уравнения, если таковые существуют.

$$\left[ \frac{x}{2022} \right] + \left[ \frac{x+1}{2022} \right] + \dots + \left[ \frac{x+2021}{2022} \right] = x^{2022} - x^{2021}.$$

Через  $[a]$  здесь обозначена целая часть числа  $a$ .

15. («Надежда энергетики», 2022, 11.2) Найдите все целочисленные решения данного уравнения, если таковые существуют.

$$\left[ \frac{x}{2022} \right] + \left[ \frac{x+1}{2022} \right] + \dots + \left[ \frac{x+2021}{2022} \right] = \frac{\lg(2^x + 1) - \lg 6}{\lg 5 - \lg 10}.$$

Через  $[a]$  здесь обозначена целая часть числа  $a$ .

16. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 8.2, 9.2) Сколько пятизначных чисел являются корнями уравнения  $x = [\sqrt{x} + 1][\sqrt{x}]$ ?

Символом  $[a]$  обозначается целая часть числа  $a$ , то есть наибольшее целое число, не превосходящее  $a$ .

17. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 8.3, 9.3) Решите уравнение:

$$[20x + 23] = 20 + 23x.$$

Напомним, что  $[a]$  обозначает целую часть числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее  $a$ .

18. (САММАТ, 2021, 9.2) Решите уравнение:

$$x^2 - x - \frac{7}{4} = \left[ x - \frac{1}{2} \right].$$

Здесь квадратные скобки  $[x]$  означают целую часть числа  $x$ , т. е. наибольшее целое, не превосходящее  $x$ .

### 3 Двойная замена

19. («Росатом», 2018, 7.4) Целой частью числа  $x$ , обозначение  $[x]$ , называют наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ . Число  $\{x\} = x - [x]$  называют дробной частью числа  $x$ . Найти  $x$ , для которого  $2x + [x] = 4$ .

20. (САММАТ, 2023, 9.4) Найти наименьшее положительное решение неравенства

$$[x]^2 - x \cdot [x] + 3 \leq 0.$$

21. («Росатом», 2018, 9.3) Найти  $x$  и  $y$ , если

$$\begin{cases} 2x - 3\{y\} = 0,5, \\ x + y = 3,5, \end{cases}$$

где  $\{y\}$  — дробная часть числа  $y$ .

22. («Курчатов», 2014, 11.1) Решите уравнение  $[x] \cdot \{x\} = x^2$ .

23. (Моск. матем. регата, 2012, 10) Решите неравенство:  $[x] \cdot \{x\} < x - 1$ .

**24.** («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.5) Решите уравнение

$$x^2 + 8\{x + 4\} - 9 = 0,$$

где  $\{a\}$  — дробная часть числа  $a$ .

**25.** («Курчатов», 2018, 11.1) Найдите все вещественные числа  $x$ , удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{2}{5},$$

где через  $[x]$  обозначена целая часть числа  $x$  (то есть наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ), а  $\{x\} = x - [x]$ .