

## Алгебраические преобразования и вычисления

### 1 Тожество параллелограмма

Тожество  $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$  помогает при построении примеров.

1. («Ломоносов», 2019, 7–8.2) Убедитесь, что  $1009 = 15^2 + 28^2$ , и представьте число 2018 в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

2. («Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 9.2) Существует ли такая точка с целыми координатами на координатной плоскости, расстояние от которой до начала координат равно  $\sqrt{2 \cdot 2017^2 + 2 \cdot 2018^2}$ ?

### 2 Числа — буквами

Чтобы вычислить адски выглядящее арифметическое выражение, можно заменить некоторые числа буквами и превратить арифметическое выражение в алгебраическое. Далее полученное алгебраическое выражение упрощаем и возвращаемся к числам.

3. (Всеросс., 1996, ОЭ, 8.1) Мороженое стоит 2000 рублей. У Пети имеется

$$400^5 - 399^2 \cdot (400^3 + 2 \cdot 400^2 + 3 \cdot 400 + 4)$$

рублей. Достаточно ли у Пети денег на мороженое?

4. (САММАТ, 2021, 9.8) Решите уравнение:  $\left(\frac{3}{25}x\right)^3 = b$ , где  $b$  — среднее арифметическое чисел

$$m = \frac{276^2 + 276 \cdot 253 + 253^2}{529}, \quad n = \frac{276^2 - 276 \cdot 253 + 253^2}{23}.$$

5. («Шаг в будущее», 2016, 9.3) Докажите, что число  $\sqrt{2013 \cdot 2016 \cdot 2019 \cdot 2022 + 81}$  является целым.

6. (ОММО, 2016, 11.1) Представьте в виде несократимой дроби

$$7 \frac{19}{2015} \times 6 \frac{19}{2016} - 13 \frac{1996}{2015} \times 2 \frac{1997}{2016} - 9 \times \frac{19}{2015}.$$

7. («Шаг в будущее», 2016, 10.2) Вычислить

$$\frac{1580\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2-x}},$$

где  $x = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{2016}{1580}} - \sqrt{\frac{1580}{2016}} \right).$

### 3 Под корнем — квадрат

Под знаком корня ищем полный квадрат.

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 7–8.3) Сравните числа  $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$  и  $2 + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ .

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.1) Сравните число

$$\sqrt{|8\sqrt{3} - 16|} - \sqrt{8\sqrt{3} + 16}$$

и наименьший корень уравнения  $4x^2 + 21x + 17 = 0$ .

10. («Ломоносов», 2021, 10–11.2) Число  $x = 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-2021}$ . Найдите значение выражения

$$\sqrt{2x + 4\sqrt{2x - 4}} + \sqrt{2x - 4\sqrt{2x - 4}}.$$

#### 4 Разные задачи

11. (Всесиб., 2016, 7.1) Доказать, что если  $a + \frac{1}{a}$  — целое число, то и  $a^2 + \frac{1}{a^2}$  — целое число.

12. («Высшая проба», 2015, 7.2) Натуральные числа  $x$  и  $y$  таковы, что верно равенство

$$x^2 - 3x = 25y^2 - 15y.$$

Во сколько раз число  $x$  больше числа  $y$ ?

13. («Росатом», 2023, 7.2) При каком натуральном  $n$  справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} = 50?$$

14. («Надежда энергетики», 2015, 7.4, 8.4) Для положительных чисел  $x, y, z$  заданы значения  $xyz = 1, x + \frac{1}{z} = 5, y + \frac{1}{x} = 29$ . Найдите значение  $z + \frac{1}{y}$ .