Алгебраические преобразования, уравнения и неравенства. Стиль МИФИ

1 Преобразования

1. (*«Росатом», 2023, 7.2*) При каком натуральном n справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=50?$$

$\boxed{5100}$

2. (*«Росатом», 2015, 9.2*) Доказать формулу «сложного корня»

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

и с ее помощью вычислить величину $\left(\frac{\sqrt{13+\sqrt{48}}-1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1}\right)^2$.

$\boxed{2}$

3. (*«Росатом», 2019, 9.3*) Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ имеет корень $x=1$. Если его коэффициенты увеличить на единицу, то он будет иметь корень $x=2$. Если еще раз увеличить коэффициенты на единицу, то среди его корней будет $x=3$. Найти квадратный трехчлен.

$\boxed{y=-6x^2+11x-5}$

4. (*«Росатом», 2024, 9.3*) Каждое из десяти положительных чисел равно квадрату суммы остальных девяти. Найдите сумму этих чисел.

$\boxed{10/81}$

5. (*«Росатом», 2024, отбор, 10.3*) Про два различных числа x и y известно, что

$$\begin{cases}x^2(y+2)=2024,\\ y^2(x+2)=2024.\end{cases}$$

Найти величину $(x+y)$.

$\boxed{506}$

2 Тождество $k^2+k+1=(k+1)^2-(k+1)+1$

Одна из особенностей стиля «Росатома» — копирование идей задач других олимпиад. В каждом подобном случае (который нам удалось заметить) мы перед задачей «Росатома» помещаем соответствующую оригинальную задачу.

6. (*Турнир городов, 1991, 8–9.1*) Докажите, что произведение 99 дробей $\frac{k^3-1}{k^3+1}$, где $k=2,\,3,\,\ldots,\,100$, больше $2/3$.

7. (*«Росатом», 2023, отбор, 10.3*) Вычислить значение произведения

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{100^3-1}{100^3+1}.$$

$\boxed{\frac{3367}{5050}}$

Вот еще пример, в котором можно применить тождество из заголовка.

8. (*«Курчатов», 2018, 11.3*) Приведите пример натуральных чисел a и b таких, что

$$\frac{a^2+a+1}{b^2+b+1}=2018^2+2018+1.$$

3 Уравнения и системы

9. (*«Росатом», 2016, 10.1*) Для функции $f(x)=x^2+2x-3$ решить уравнение

$$f(2f(x))=117.$$

$\boxed{x_1=-4,\ x_2=2}$

10. (*«Росатом», 2021, 10.4*) Известно, что квадрат любого из корней кубического уравнения

$$x^3-x+2=0$$

является корнем другого, также кубического уравнения. Найдите это уравнение.

$\boxed{x^3-2x^2+x-4=0}$

11. (*«Росатом», 2023, 10.4*) Решить уравнение

$$\left|2x-\sqrt{1-4x^2}\right|=4\sqrt{2}x\sqrt{1-4x^2}.$$

$\boxed{x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};\ x=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$

12. (*«Росатом», 2025, 11.5*) Решить уравнение

$$\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)\left(4-5x+\sqrt{17-40x+25x^2}\right)=1.$$

$\boxed{1;\ 4}$

13. (*«Росатом», 2022, 8.3*) В строительной бригаде, состоящей из рабочих и бригадира, средний возраст рабочих на 16 лет меньше возраста бригадира, а бригадир на 12 лет старше среднего возраста членов бригады. Сколько рабочих в бригаде?

$\boxed{3}$

14. (*«Росатом», 2024, 11.1*) У Пети в семье помимо папы, мамы и бабушки есть еще братья и сестры. Средний возраст папы, мамы и бабушки на 20 лет больше среднего возраста детей и на 10 лет больше среднего возраста всех членов семьи. Сколько сестер у Пети?

$\boxed{1}$

15. (*«Росатом», 2024, отбор, 11.1*) На столе разложены в ряд 18 кучек монет одинакового достоинства, упорядоченные номерами 1, 2, . . ., 18. Количество монет в кучке с номером в сумме с удвоенным числом монет в следующей кучке с номером всегда одинаковое и равное 180 для всех. Сколько монет находится в последней кучке?

$\boxed{60}$

4 Уравнения с целой частью

Идейным вдохновителем «Росатома» тут является Московская математическая олимпиада :-)

16. (*ММО, 1957, 9.2*) Решите уравнение: $x^3 - [x] = 3$.

$\boxed{\sqrt[3]{4}}$

17. (*«Росатом», 2023, отбор, 10.4*) Решить уравнение $x^3 - 2[x] = 5$. Здесь $[x]$ — целая часть числа x — наибольшее целое число, не превосходящее x.

$\boxed{x_1 = \sqrt[3]{7},\ x_2 = \sqrt[3]{9}}$

18. (*ММО, 1981, 7.4, 8.4*) Дано число x, большее 1. Обязательно ли имеет место равенство

$$\left[\sqrt{[\sqrt{x}\,]}\right] = \left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]?$$

$\boxed{\text{Да}}$

19. (*«Росатом», 2025, 11.5*) Решить уравнение

$$\left[\sqrt{\left[\sqrt{2024(x+1)(3-x)}\right]}\right] = \left[\sqrt[4]{2024(x+1)(3-x)}\right].$$

Здесь $[b]$ — целая часть числа: наибольшее целое число не превосходящее b.

$\boxed{x \in [-1;3]}$

20. (*ММО, 2020, 11.2*) Решите уравнение

$$\operatorname{tg} \pi x = [\lg \pi^x] - [\lg [\pi^x]],$$

где $[a]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее a.

$\boxed{x = 0, 1, 2, \ldots}$

21. (*«Росатом», 2024, 11.2*) Решите уравнение

$$2\sin \pi x = \left[\lg \frac{2^x}{10}\right] - \left[\lg\left[2^x\right]\right].$$

Здесь $[a]$ — целая часть числа a — наибольшее целое число, не превосходящее a.

$\boxed{x_1 = 2m - \frac{1}{6},\ x_2 = 2m - \frac{5}{6},\ m = 1, 2, \ldots}$

5 Неравенства

22. (*«Росатом», 2024, отбор, 9.4*) Найти решения системы:

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| \geqslant 3, \\ |2x - 3| \geqslant x^2, \\ |x^2 - 3| \geqslant 2|x|. \end{cases}$$

$\boxed{-3; -1}$