

Алгебраические преобразования, уравнения и неравенства. Стиль МГУ

1 Преобразования

1. («Ломоносов», 2005.1) Вычислите

$$\frac{2xy(x^3 + y^3)}{x^2 - xy + y^2} + \frac{(x + y)(x^4 - y^4)}{x^2 - y^2}$$

при $x = -1, \underbrace{6 \dots 6}_{44} 7$ и $y = -1, \underbrace{3 \dots 3}_{45}$.

27-

2. («Ломоносов», 2020, 9.1, 10.1) Вычислите

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \dots + 2017\sqrt{1 + 2018 \cdot 2020}}}}$$

3. («Ломоносов», 2021, 10–11.2) Число $x = 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-2021}$. Найдите значение выражения

$$\sqrt{2x + 4\sqrt{2x - 4}} + \sqrt{2x - 4\sqrt{2x - 4}}.$$

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.1) Найдите десятичную запись числа

$$\frac{(2x - x^2) \cdot 10^6}{33} + \left(\sqrt[3]{2} + 1\right) \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3}}\right),$$

если $x = 0,9999$.

3030403

5. («Ломоносов», 2013, 9.7) Доказать, что если числа x , y и z — целые, то число

$$\frac{1}{2} \left((x - y)^4 + (y - z)^4 + (z - x)^4 \right)$$

является квадратом некоторого целого числа.

2 Уравнения

6. («Ломоносов», 2025, 9.2) Решите уравнение:

$$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13.$$

8:19^ - 1-

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.2) Какие значения может принимать выражение $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, где x_1 и x_2 — несовпадающие между собой корни уравнения $x^3 - 2015x + 2016 = 0$?

2010

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.1) Решите уравнение

$$(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \dots + x^{10}) = (1 + x + x^2 + \dots + x^6)^2.$$

0 : 1 -

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.4) Найдите количество общих точек графиков функций

$$y = x^3 + 6x \quad \text{и} \quad y = 12x^2 + 1,$$

а также абсциссы этих точек.

Для точек с абсциссой $\frac{2}{3}$

10. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, отбор, 9, 10, 11) Решите уравнение

$$\sqrt[3]{15x + 1 - x^2} + \sqrt[3]{x^2 - 15x + 27} = 4.$$

0 : 2 ; 13 ; 15

11. («Ломоносов», 2025, 11.1) Решите уравнение:

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2 = \sqrt{3 + \sqrt{8}} + \sqrt{3 - \sqrt{8}}.$$

[2 ; 5 ; 2] $\ni x$

12. («Ломоносов», 2017, 10–11.2) Решите уравнение:

$$\sqrt{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = 2\sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} + \sqrt{2}.$$

$\frac{16}{257}$

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11.5) Решите уравнение:

$$7x^2 + 20x - 14 = 5\sqrt{x^4 - 20x^2 + 4}.$$

$-\frac{2}{5-\sqrt{11}}, \frac{3}{-10-\sqrt{11}}$

14. («Ломоносов», 2014, отбор, 9.5) Решите уравнение

$$(x^2 - 7x) \cdot \sqrt[2013]{(x^2 - 7x)^2 + 1} + (2x + 6) \cdot \sqrt[2013]{(2x + 6)^2 + 1} = 0.$$

3 ; 2

15. (МГУ, мехмат, 2001-03.1) Решите уравнение

$$3x - 2|x - 2| = 3\sqrt{3x + 18} - 2\left|\sqrt{3x + 18} - 2\right|.$$

9

16. («Ломоносов», 2021, 10–11.1) Пусть $f(x) = x^2 + 10x + 20$. Решите уравнение

$$f(f(f(f(f(x)))))) = 0.$$

9/28 7 9-

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.5) Решите уравнение

$$\left|x\sqrt{1-x^2} + x\right| = \sqrt{1+x^2}.$$

z
1-2/1

3 Теорема Виета для уравнений высших порядков

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.2) Найдите сумму $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, если известно, что три различных действительных числа x , y и z удовлетворяют условиям:

$$x^3 + 1009 = 2018x, \quad y^3 + 1009 = 2018y, \quad z^3 + 1009 = 2018z$$

2

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2023, 10.3, 11.3) Числа x_1 , x_2 , x_3 являются корнями уравнения

$$x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = 9.$$

При каких значениях a , b , c корнями уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ являются числа $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$ и $x_3 + x_1$?

20. («Ломоносов», 2012, отбор, 10–11.7) Найдите сумму квадратов всех действительных корней уравнения

$$x^5 + 2010x^2 + 2011 = x^4 + 2011x^3 + 2012x.$$

4025

4 Уравнения с целой и дробной частями

21. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.5) Решите уравнение

$$x^2 + 8\{x + 4\} - 9 = 0,$$

где $\{a\}$ — дробная часть числа a .

-3; +3; √33/4; √41/4

22. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.4) Решите уравнение

$$[\log_2(\log_3 x)]^2 - 11 \log_2([\log_3 x]) + 18 \log_2(\log_3[x]) = 0$$

(через $[t]$ обозначена целая часть числа t , то есть наибольшее целое число, не превосходящее t).

5 Системы уравнений и неравенств

23. («Ломоносов», 2021, 9.3) Решите систему

$$\begin{cases} |x^4 - 625x^2| \neq x^4 - 625x^2, \\ |6x^2 - 257x + 251| + 6x^2 - 257x + 251 = 0. \end{cases}$$

24. («Ломоносов», 2024, 11.3) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (xy - 3 + 3x - y)|y - x - 9| = (x - 4)|xy - 3 + 3x - y|, \\ \sqrt{y - x + 9} = y - 4. \end{cases}$$

⊠(8'1'69-) '8'1

25. (МГУ, мехмат, 1977.4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$$

6 Неравенства

26. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9.8) Решите неравенство:

$$\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{2x + 3 - x^2} \geq 2.$$

⊠'1'1-

27. («Ломоносов», 2025, 10.1) Решите неравенство:

$$\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4}} \geq \log_2 x + 1.$$

В ответ запишите сумму всех целых значений функции $f(x_0) = 16x_0$, где x_0 — решение неравенства.

⊠⊠

28. («Покори Воробьёвы горы!», 2025, 11.3) Решите неравенство

$$2 \log_4^2(x+3) \cdot \log_9^2(x+8) \leq \log_3(x+3) \cdot \log_2(x+8) - 2.$$

1

29. («Ломоносов», 2006.6) Решите неравенство

$$\sqrt{4-x} - 2 \leq x|x-3| + 4x.$$

[0;4]