

# Алгебраические преобразования, уравнения и неравенства. Стиль МФТИ

## 1 Преобразования

1. («Физтех», 2025, 10.1) Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

81

2. («Физтех», 2025, 11.2) Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$$

не изменяется, если  $x$  уменьшить на 1, а  $y$  — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 3xy$ .

1

3. («Физтех», 2025, 10.4) Петя загадал такие вещественные числа  $x, y, z$ , что выражения

$$\frac{x(y-z)}{y(z-x)} \quad \text{и} \quad \frac{2y(z-x)}{z(y-x)}$$

принимают одно и то же значение  $A$ . Найдите все возможные значения  $A$ , если известно, что их не менее двух.

1 = √ или 2 = √

4. («Физтех», 2025, 9.1) Свободный член квадратного трёхчлена увеличили на 3, в результате чего квадрат разности его корней уменьшился на 2. Затем к свободному члену полученного трёхчлена прибавили число  $d$ , и квадрат разности его корней уменьшился ещё на 4. Найдите  $d$ .

9 = p

5. («Физтех», 2025, 11.1) Дан приведённый квадратный трёхчлен  $f(x)$  такой, что

- уравнение  $f(x) = 2x^2$  имеет единственное решение,
- а также уравнение  $f(x) = -8$  имеет единственное решение.

Найдите сумму корней уравнения  $f(x) = 0$ .

√7

## 2 Уравнения

6. («Физтех», 2020, 9.4) Решите уравнение

$$2x^4 + x^2 - 6x - 3x^2|x - 3| + 9 = 0.$$

$$\frac{7}{81} = \frac{7}{81}$$

7. («Физтех», 2020, 10.4) Решите уравнение

$$3x^4 + x^2 - 8x - 4x^2|x - 4| + 16 = 0.$$

$$\frac{7}{81} = \frac{7}{81}$$

8. («Физтех», 2023, 9.3) Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x.$$

$$\frac{7}{81} = x$$

9. («Физтех», 2023, 10.4) Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

$$\frac{7}{81} = x$$

10. («Физтех», 2021, 10.2) Решите уравнение

$$\sqrt{x + 4} - \sqrt{6 - x} + 4 = 2\sqrt{24 + 2x - x^2}.$$

$$\frac{7}{81} = \frac{7}{81}$$

11. («Физтех», 2025, 10.6) Решите уравнение

$$\sqrt[4]{8x + 1} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9x - 1}.$$

$$\frac{8}{1} = \frac{8}{1}$$

12. («Физтех», 2024, 10.1) Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .

$$x^2 + 1 = x^2 + 1$$

13. («Физтех», 2024, 10.1) В прямоугольном треугольнике длины катетов равны  $|2x - 2|$  и  $|x^2 + 3x|$ , а длина гипотенузы равна  $|3x + 1|$ . Найдите  $x$ .

$$x^2 + 1 = x^2 + 1$$

### 3 Уравнения с целой частью

14. («Физтех», 2023, отбор, 9.5) Найдите сумму всех решений уравнения

$$[x]^2 + 40x + 336 = 0.$$

−155,9

15. («Физтех», 2023, отбор, 10.4) Найдите сумму квадратов всех решений уравнения

$$x^2 - 24[x] + 23 = 0.$$

1516

16. («Физтех», 2023, отбор, 11.2) Найдите сумму квадратов всех решений уравнения

$$x^2 - 14[3x] + 152 = 0.$$

4306

### 4 Системы уравнений

17. («Физтех», 2021, 9.4) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2x^2y^2 = 3, \\ x^4 + y^4 + \frac{2}{3}x^2y^2 = 17. \end{cases}$$

$(\sqrt{2}^{\wedge} \mp \sqrt{3}^{\wedge} -), (\sqrt{2}^{\wedge} \mp \sqrt{3}^{\wedge}), (\sqrt{3}^{\wedge} \mp \sqrt{2}^{\wedge} -), (\sqrt{3}^{\wedge} \mp \sqrt{2}^{\wedge})$

18. («Физтех», 2021, 10.4) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2 + y^2} + x^2y^2 = 2, \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 5. \end{cases}$$

$(1 \mp \sqrt{1} -), (1 \mp \sqrt{1})$

19. (МФТИ, 2000) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^3}{2y} + 3xy = 25, \\ \frac{y^3}{x} - 2xy = 16. \end{cases}$$

$(2, 4), (-2, -4)$

20. («Физтех», 2024, 9.6) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4, \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8. \end{cases}$$

(2; 2; -2)

21. («Физтех», 2022, 9.2) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 50, \\ 5y + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 1. \end{cases}$$

(-4; 29)

22. («Физтех», 2022, 10.2) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{y^2 - x^2} = 17, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - x^2} = -10. \end{cases}$$

(-13; 14)

23. («Физтех», 2022, 11.1) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20. \end{cases}$$

(6; -28)

24. («Физтех», 2022, 9.3) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

(-1; 1), (1; 2)

25. («Физтех», 2024, 10.6) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0, \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

(-1; 0), (3; 4), (2; 2), (2; -2)

26. («Физтех», 2024, 10.5) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

$$\left( \frac{\tau}{\varepsilon \Gamma^{\wedge} + \varepsilon}; \frac{\tau}{\varepsilon \Gamma^{\wedge} + \varepsilon} \right)$$

27. («Физтех», 2022, 10.3) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

$$\left( \frac{9^{\wedge}}{\varepsilon} + \tau; \frac{9^{\wedge}}{\Gamma} + \Gamma \right) ; (\Gamma; 0)$$

28. («Физтех», 2022, 11.2) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

$$\left( \frac{\tau}{\varepsilon} \wedge - \Gamma; \frac{\tau}{\varepsilon} \wedge - \tau \right) ; (\tau; 9)$$

## 5 Неравенства

29. («Физтех», 2017, 9.2) Решите неравенство

$$x^2 - 2x + 1 - |x^3 - 1| - 2(x^2 + x + 1)^2 \geq 0.$$

$$\left[ \frac{\tau}{\Gamma} - ; \Gamma - \right]$$

30. («Физтех», 2022, 9.1) Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

$$\{\tau\} \cap (\tau; 0) \ni x$$

31. («Физтех», 2022, 9.1) Решите неравенство

$$\left( \frac{(x-5)^2 + 4}{|x-5|} - 4 \right) (|x-4| + |x-6| - 2) \leq 0.$$

$$\{\mathbb{Z}\} \cap [9; 9) \cap (9; 7] \cap \{\varepsilon\}$$

32. («Физтех», 2020, 10.4) Решите неравенство

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0.$$

$$\boxed{(\infty+; 1] \cap \left[ \frac{\sqrt{17}+1}{2}, \frac{\sqrt{17}-1}{2} \right] \cap [2; \infty-)}$$

33. («Физтех», 2024, 10.4) Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{4x - x^2 - 3} - 3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2}}.$$

$$\boxed{\{2\} \cap \left( \frac{\sqrt{17}+1}{2}; 1 \right] \ni x}$$