

## Устойчивость равновесия

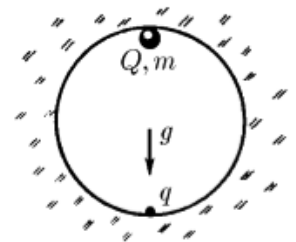
В данной листовке собраны задачи из различных разделов физики. В каждой из этих задач требуется исследовать положение равновесия на устойчивость.

Напомним, что положение равновесия называется *устойчивым*, если при малом отклонении тела от положения равновесия возникает сила, стремящаяся вернуть тело в это положение. Пример — шарик, лежащий на дне сферической чаши. При выведении из положения устойчивого равновесия тело, предоставленное само себе, начинает совершать колебания вблизи этого положения.

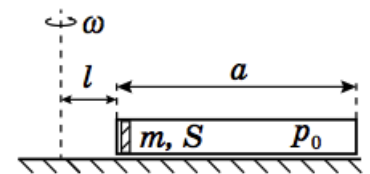
Если же при сколь угодно малом смещении от положения равновесия на тело начинает действовать сила, направленная от этого положения, то положение равновесия называется *неустойчивым*. Пример — шарик, покоящийся в верхней точке гладкой сферы. При любом смещении от положения неустойчивого равновесия тело навсегда покинет это положение.

**ЗАДАЧА 1.** (Савченко, 6.1.14) Какой минимальный заряд  $q$  нужно закрепить в нижней точке сферической полости радиуса  $R$ , чтобы в поле тяжести небольшой шарик массы  $m$  и заряда  $Q$  находился в верхней точке полости в положении устойчивого равновесия?

$$\frac{\partial}{\partial q} U(q) = 0$$



**ЗАДАЧА 2.** (Всеросс., 2018, финал, 10) На центрифуге, которая может вращаться только вокруг вертикальной оси, закреплён в горизонтальном положении герметичный лёгкий цилиндр. Ось цилиндра проходит через ось вращения. Внутри цилиндра находится тонкий поршень, который может перемещаться без трения. Цилиндр заполнен идеальным газом, давлением которого поршень прижат к торцу цилиндра, ближе к оси вращения. Длина цилиндра равна  $a = 0,5$  м, площадь поршня  $S = 5$  см<sup>2</sup>, его масса  $m = 10$  г, давление газа в цилиндре  $p_0 = 1,0$  кПа. Расстояние от оси вращения до ближнего торца цилиндра  $l = 0,1$  м. Центрифуга начинает вращаться, причём угловая скорость вращения  $\omega$  очень медленно увеличивается. Температура газа поддерживается постоянной.



*Примечание:* считайте, что в ходе эксперимента воздух остаётся однородным.

1) При каком значении  $\omega_1$  угловой скорости начальное положение равновесия поршня перестанет быть устойчивым?

2) На каком расстоянии  $x_1$  от начального положения установится поршень при неизменной угловой скорости  $\omega_1$ ?

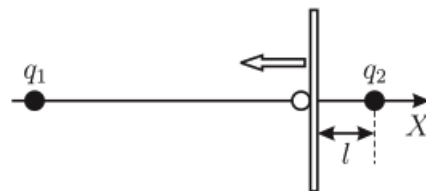
3) Теперь частоту вращения начали медленно уменьшать. При каком значении  $\omega_2$  поршень вернётся в исходное положение?

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x) = 0$$

Задача 3. (МОШ, 2014, 11) Небольшой шарик, заряженный зарядом  $q$ , покоится на гладком горизонтальном непроводящем столе. К шарiku присоединена горизонтальная пружина жёсткостью  $k$ , второй конец которой закреплён. Вдоль оси пружины к шарiku с большого расстояния очень медленно приближают такой же, но противоположно заряженный шарик. Найдите деформацию пружины в момент столкновения шариков.

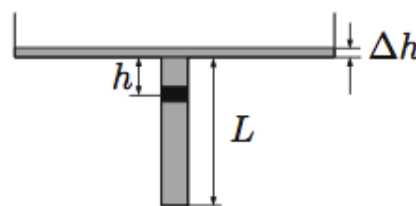
$$\frac{q^0 \varepsilon \varepsilon_0}{\varepsilon^b} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon}} = x$$

Задача 4. (МОШ, 2008, 11) Положительный  $q_1$  и отрицательный  $q_2$  точечные заряды закреплены на оси  $X$  по разные стороны от гладкой непроводящей пластины, плоскость которой перпендикулярна оси  $X$ . Маленький положительно заряженный шарик также находится на оси  $X$ , упираясь в пластину, как показано на рисунке. Первоначально пластина расположена вблизи отрицательного заряда, шарик при этом находится в равновесии. Пластину начинают поступательно перемещать вдоль оси  $X$ , медленно увеличивая расстояние  $l$  между пластиной и отрицательным зарядом. Когда  $l$  достигает  $1/3$  расстояния между зарядами, шарик «улетает» с оси  $X$ . Определите отношение  $q_1/q_2$ . Влиянием вещества пластины на электрическое поле, а также силой тяжести пренебречь.



$$8 = \frac{\varepsilon b}{15}$$

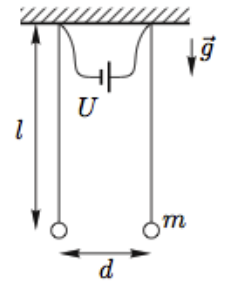
Задача 5. (Всеросс., 2011, финал, 11) Закрытый снизу тонкостенный цилиндр длиной  $L = 1,50$  м установлен вертикально. В верхней части он соединён с другим цилиндром значительно большего диаметра (рис.). В нижнем цилиндре на расстоянии  $h_1 = 380$  мм от верхнего края расположен тонкий лёгкий поршень. Над поршнем находится слой ртути высотой  $h + \Delta h$ , где  $\Delta h \ll h$ , ниже поршня — гелий под давлением  $p_1 = p_0 + \rho_p g h_1$ , где  $p_0 = 760$  мм. рт. ст. — атмосферное давление,  $\rho_p = 13,6$  г/см<sup>3</sup> — плотность ртути. Из-за большой разницы диаметров цилиндров изменением  $\Delta h$  можно пренебречь при смещениях поршня по всей длине нижнего цилиндра.



Из условия задачи следует, что поршень находится в равновесии. Является ли это положение равновесия устойчивым? Существуют ли другие положения равновесия? Если есть, то при каких расстояниях  $h_i$  от поршня до верхнего края? Являются ли эти положения равновесия устойчивыми? Можно считать, что при малых изменениях объёма под поршнем температура гелия остаётся постоянной.

$$\text{Еще } h_2 = 360 \text{ мм; первое — устойчивое, второе — нет}$$

ЗАДАЧА 6. (Всеросс., 2014, финал, 11) К горизонтальному непроводящему потолку на тонких металлических проволоках длиной  $l = 1$  м на расстоянии  $d = 10$  см друг от друга подвешены два одинаковых стальных шарика радиусом  $r = 5$  мм и массой  $m = 4$  г (см. рисунок). В начальный момент шарики не заряжены и покоятся. Ускорение свободного падения  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>. Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.



- 1) Определите период  $T$  малых свободных колебаний шариков.
- 2) К точкам крепления проволок подключают источник напряжения  $U$  с большим внутренним сопротивлением  $R = 10^{15}$  Ом. При каком значении  $U = U_{\min}$  шарики столкнутся через некоторое время?
- 3) Найдите время  $\tau$ , через которое разность потенциалов между шариками достигнет значения  $U_{\min}$ , если  $U = U_0 = 1,0 \cdot 10^6$  В.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{9,8}} \approx 2,01 \text{ с} \quad (1)$$

ЗАДАЧА 7. (APhO, 2012)

- [Предел Чандрасекара / Chandrasekhar Limit.](#)
- [Solution.](#)