

Уравнение колебаний. 2

Уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

можно получить, дифференцируя по времени закон сохранения энергии. Покажем это на простейшем примере горизонтального пружинного маятника.

Пусть положение равновесия маятника совпадает с началом координат $x = 0$. Тогда координата x маятника в процессе колебаний равна по модулю величине деформации пружины. Сумма кинетической энергии маятника и потенциальной энергии деформированной пружины не меняется со временем:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const.}$$

Дифференцируем по времени это равенство:

$$\frac{m}{2} \cdot 2\dot{x}\ddot{x} + \frac{k}{2} \cdot 2x\dot{x} = 0.$$

Полученное равенство нулю должно выполняться в любой момент времени, поэтому можно сократить на \dot{x} :

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

откуда

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Видим, что $\omega^2 = \frac{k}{m}$, и тогда период колебаний пружинного маятника $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

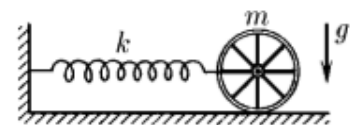
ЗАДАЧА 1. Выведите формулу $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ для периода колебаний математического маятника путём дифференцирования закона сохранения энергии.

ЗАДАЧА 2. Выведите формулу Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$ для периода колебаний в LC -контуре путём дифференцирования закона сохранения энергии.

ЗАДАЧА 3. (*МФТИ, 1995*) Определить период малых колебаний в вертикальной плоскости небольшого тела массы m с зарядом q внутри непроводящей сферы радиуса R , если в верхней точке сферы закреплён одноимённый точечный заряд Q . Внутренняя поверхность сферы гладкая. Ускорение свободного падения g .

$$\frac{\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} + mg}{R} \sqrt{L} = \mathcal{L}$$

ЗАДАЧА 4. Пружина жёсткости k одним концом присоединена к оси колеса массы m , которое способно катиться без проскальзывания, а другим прикреплена к стенке. Найдите период колебаний системы. Масса колеса однородно распределена по ободу.



$$\frac{q}{mR} \sqrt{L} = \mathcal{L}$$

ЗАДАЧА 5. По дну цилиндрической лунки радиусом R катается без проскальзывания полый цилиндр радиусом r ($r < R$). Найдите период малых колебаний цилиндра.

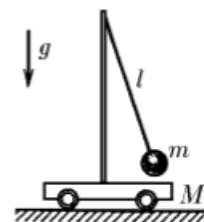
$$\frac{6}{(2-R)r} \sqrt{\frac{6}{5} R r} = T$$

ЗАДАЧА 6. Найдите период колебаний тонкого обруча радиуса R , подвешенного на гвозде. Колебания происходят в плоскости обруча. Проскальзывания нет.

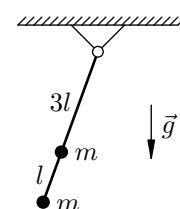
$$\frac{6}{\sqrt{5R}} \sqrt{\frac{6}{5} R} = T$$

ЗАДАЧА 7. На гладкой горизонтальной поверхности находится тележка массой M с установленным на ней математическим маятником длины l и массой m . Найдите период малых колебаний системы.

$$\frac{m+M}{M} \sqrt{\frac{6}{5} \frac{l}{M}} = T$$



ЗАДАЧА 8. (МФТИ, 2006) Маятник представляет собой шарнирно прикреплённый к потолку жёсткий лёгкий стержень длины $4l$, на котором закреплены два маленьких груза массой m каждый (см. рисунок). Трением в шарнире и сопротивлением воздуха можно пренебречь.

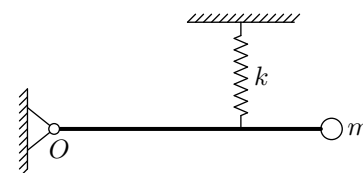


1) Стержень отклоняют на угол $\varphi_0 = 60^\circ$ от вертикали и отпускают без толчка. Найдите максимальную скорость движения нижнего груза.

2) Найдите период колебаний маятника при малых отклонениях от положения равновесия.

$$\frac{6l}{19g} \sqrt{\frac{6}{5} \frac{g}{l}} = T \quad (\tau : \sqrt{6l} \sqrt{\frac{6}{5}} = \omega \text{ (I)})$$

ЗАДАЧА 9. (МФТИ, 1996) Конструкция из жёстко соединённых лёгкого стержня и небольшого по размерам шарика массой m может совершать колебания в вертикальной плоскости под действием пружины с жёсткостью k , двигаясь при вращении без трения вокруг горизонтальной оси O (см. рисунок). Пружина лёгкая, её точка прикрепления к стержню делит его длину в отношении $1 : 2$, считая от шарика. В положении равновесия стержень горизонтален, а ось пружины вертикальна.

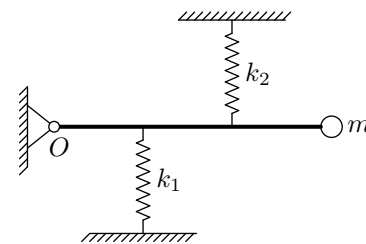


1) Найти удлинение пружины в положении равновесия системы.

2) Найти период малых колебаний конструкции.

$$\frac{3}{\omega} \sqrt{\frac{3}{5} \frac{g}{l}} = T \quad (\tau : \frac{3}{5} \frac{g}{l} = T \text{ (I)})$$

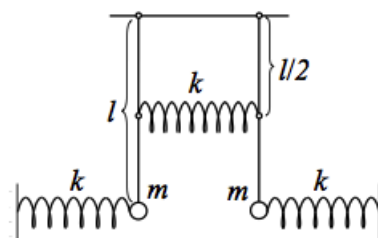
Задача 10. (МФТИ, 1996) Конструкция из жёстко соединённых лёгкого стержня и небольшого шарика массой m может совершать колебания под действием двух пружин с жёсткостями k_1 и k_2 , двигаясь при вращении без трения вокруг вертикальной оси O по гладкой горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). Пружины лёгкие, их оси горизонтальны, а точки прикрепления к стержню делят его на три равные части. В положении равновесия оси пружин перпендикулярны стержню, и пружина с жёсткостью k_1 растянута на величину L_1 .



- 1) Найти деформацию второй пружины в положении равновесия.
- 2) Найти период малых колебаний конструкции.

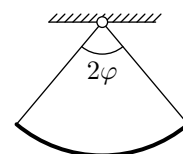
$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^2} \ddot{\varphi} = L \left(\varphi : \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \varphi^2} = \mathcal{L} \right)$$

Задача 11. (МОШ, 2019, 11) Найти собственную частоту малых колебаний системы, изображённой на рисунке, при одинаковом смещении грузов массой $m = 1$ кг в разные стороны. Каждый груз подвешен на жёсткую невесомую спицу длиной $l = 1$ м. В положении равновесия пружины жесткостью $k = 10$ Н/м не деформированы. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с². Ответ выразите в с⁻¹ и округлите до целых.



$$\tau^{-1} \text{ с}$$

Задача 12. (МФТИ, 1996) Металлический прут в форме дуги окружности радиусом L висит на двух лёгких нитях длины L каждая (см. рисунок). Масса прута равна m , его поперечное сечение постоянно. Угол между нитями равен 2φ .



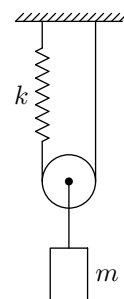
- 1) Найти силу натяжения нитей в положении равновесия.
- 2) Найти период малых колебаний такой «дуги» в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью «дуги».

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^2} \ddot{\varphi} = L \left(\varphi : \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \varphi^2} = \mathcal{L} \right)$$

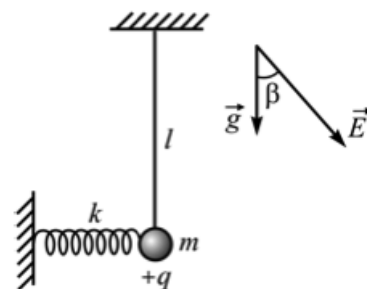
Задача 13. (МФТИ, 1996) Груз массой m подвешен с помощью пружины жёсткостью k , лёгких нитей и невесомого блока (см. рисунок).

- 1) Найти удлинение пружины в положении равновесия системы.
- 2) Найти период вертикальных колебаний груза при условии непровисания нитей.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^2} \ddot{y} = L \left(y : \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} = \mathcal{L} \right)$$

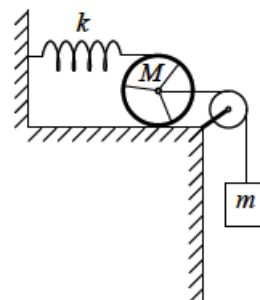


Задача 14. (МОШ, 2011, 11) На тонкой непроводящей нити длиной l подвешен маленький шарик массой m , который заряжен зарядом $+q$. Слева к шару прикреплена непроводящая пружинка жёсткостью k , расположенная горизонтально. Шарик находится в однородном электрическом поле E , направленном так, как показано на рисунке. В состоянии равновесия нить с шариком висит вертикально. Найти период малых колебаний шарика в плоскости рисунка.



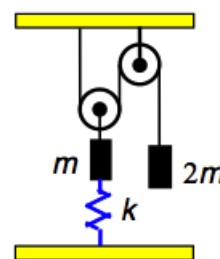
$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg \cos \alpha + \frac{l}{b} + \frac{u}{q}}{k}} = L$$

Задача 15. (МОШ, 2017, 11) Найти собственную частоту малых колебаний груза m в системе, изображённой на рисунке. Обруч M катается без проскальзывания, массой спиц по сравнению с массой обруча пренебречь.



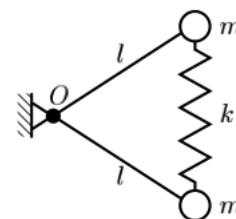
$$\frac{m + 1/2 M}{k} \sqrt{\frac{g}{R}} = \omega$$

Задача 16. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) В системе, изображенной на рисунке, массы грузов равны m и $2m$, жесткость пружины k , блоки, нить и пружина — невесомые, блоки вращаются без трения, нить по блокам не скользит. Груз $2m$ смещают из положения равновесия вниз на расстояние s , после чего грузы совершают гармонические колебания. Найдите максимальные скорости колеблющихся грузов. Ускорение свободного падения равно g .



$$\frac{q}{b \sin \alpha} \geq s \text{ или } \text{иначе} \text{ } \frac{u}{q} \sqrt{\frac{g}{s}} = \omega_0; \frac{u}{q} \sqrt{\frac{g}{s}} = \omega_2 \omega_0$$

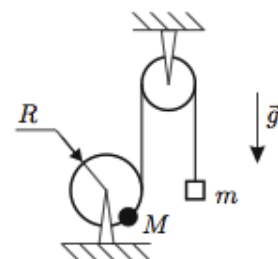
Задача 17. (Всеросс., 2009, РЭ, 11) Период малых колебаний системы (рис.) около положения равновесия равен $T = 2\pi \sqrt{m/k}$, где m — масса каждого из шариков, а k — жёсткость пружины. Соединение лёгких стержней шарнирное и закреплено в точке O . Найдите длину L пружины в нерастянутом состоянии.



$$\sqrt{k} l = T$$

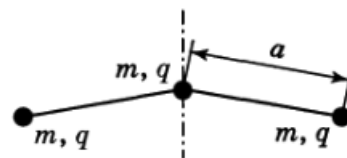
Задача 18. (Всеросс., 2013, РЭ, 11) Два лёгких блока соединены нерастяжимой лёгкой нитью (см. рисунок). На краю нижнего блока радиуса R закреплена точечная масса M , соединённая с нитью. К другому концу нити прикреплен груз m , причём $M > m$.

Найдите период T малых колебаний системы около положения равновесия.



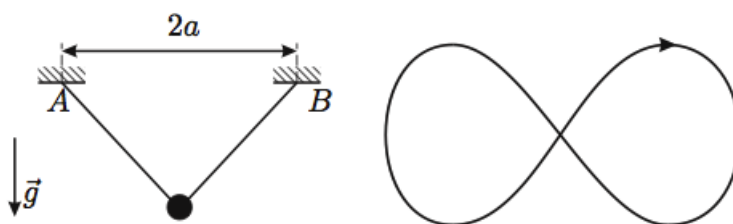
$$\frac{m - 1/2 M}{m + 1/2 M} \sqrt{\frac{6}{R}} \sqrt{g} = L$$

ЗАДАЧА 19. (Всеросс., 1999, ОЭ, 11) На гладкой горизонтальной непроводящей поверхности расположены три небольших по размерам шарика массой m и зарядом q каждый, связанные двумя нерастяжимыми непроводящими нитями длиной a каждая. Шары удерживают в положении, когда нити составляют угол, близкий к 180° (рис.). Затем шары отпускают. Найдите период свободных малых колебаний системы.



$$\frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2kq^2}{4\pi\epsilon_0 m a^2}} \sqrt{2} \sqrt{2} = L$$

ЗАДАЧА 20. (Всеросс., 2000, финал, 11) К двум точкам A и B , находящимся на одной горизонтали, между которыми расстояние $2a$, прикрепена тонкая лёгкая нерастяжимая нить длиной $2l$ (рис. слева). По нити без трения скользит маленькая тяжёлая бусинка. Ускорение свободного падения g .



- 1) Найдите частоту малых колебаний бусинки ω_\perp в плоскости, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки крепления нити.
- 2) Найдите частоту малых колебаний бусинки ω_\parallel в вертикальной плоскости, проходящей через точки крепления нити.
- 3) При каком отношении l/a траектория движения бусинки в проекции на горизонтальную плоскость может иметь вид, представленный на рис. справа?

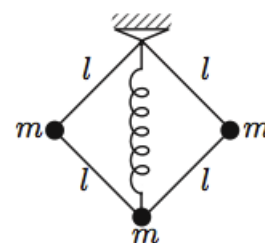
Примечание. При решении задачи Вам может оказаться полезной формула

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$$

при $x \ll 1$.

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2kq^2}{4\pi\epsilon_0 m a^2}} \sqrt{2} \sqrt{2} = L$$

ЗАДАЧА 21. (Всеросс., 2003, финал, 11) Конструкция (рис.) состоит из трёх одинаковых маленьких шариков массой m каждый, шарнирно соединённых лёгкими спицами длины l . В положении равновесия конструкция удерживается вертикальной пружиной жёсткости k и имеет форму квадрата.



- 1) Найдите длину l_0 недеформированной пружины.
- 2) Пусть нижний шарик смещён по вертикали (вверх или вниз) на малое (по сравнению с l) расстояние x . Определите изменение $\Delta E_{\text{пот}}$ потенциальной энергии системы.
- 3) Пусть нижнему шару сообщена вертикально направленная скорость v . Определите кинетическую энергию $\Delta E_{\text{кин}}$ системы.
- 4) Определите период T малых вертикальных колебаний нижнего шарика.

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2kq^2}{4\pi\epsilon_0 m a^2}} \sqrt{2} \sqrt{2} = L$$

ЗАДАЧА 22. (Всеросс., 2011, финал, 11) Массивное кольцо подвешено на трёх тонких вертикальных нитях длиной L (рис.).



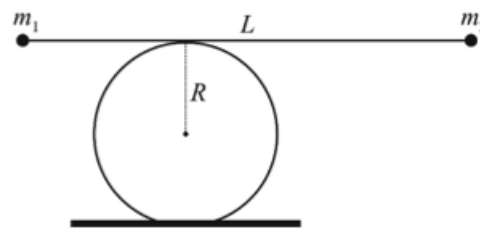
1) Определите период малых крутильных колебаний кольца относительно оси OO' .

2) Насколько изменится период крутильных колебаний, если в центре кольца (точка O) при помощи лёгких спиц расположить тело малых размеров (материальную точку), масса которого равна массе кольца?

Указание: При $\alpha \ll 1$ можно использовать приближённое выражение $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$.

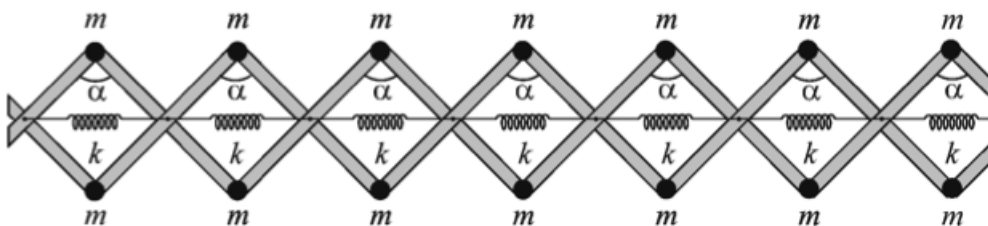
$$\frac{\varepsilon \wedge}{J} = {}_{\mu} J \left(\tau : \frac{6}{J} \right) \wedge \mu \tau = J \quad (1)$$

ЗАДАЧА 23. (МОШ, 2017, 11) Два маленьких шарика массами m_1 и m_2 закреплены на концах тонкого жёсткого очень лёгкого стержня длиной L . Этот стержень покоится на поверхности шероховатого горизонтального неподвижно закреплённого цилиндра радиусом R . В положении равновесия стержень горизонтален и перпендикулярен оси цилиндра (на рисунке показан вид со стороны торца цилиндра). Стержень поворачивают на малый угол таким образом, что он движется относительно цилиндра без проскальзывания, и отпускают. После этого начинаются колебания, в процессе которых стержень катается по поверхности цилиндра также без проскальзывания, а шарики движутся в плоскости рисунка. Чему равен период этих колебаний? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.



$$\frac{\mu \delta}{\varepsilon \mu \nu \mu} \wedge \frac{\tau \mu + \nu \mu}{\tau \mu \tau} = J$$

ЗАДАЧА 24. (МОШ, 2015, 11) Шарнирная конструкция состоит из очень большого числа N периодически повторяющихся одинаковых звеньев (см. рисунок).



Каждое звено включает в себя пружину, концы которой прикреплены к серединам двух пар скрещенных реек, два сферических шарнирных блока и четыре половинки самих реек. Шарнирные блоки дают возможность рейкам свободно вращаться в пространстве. Жёсткость каждой из пружин равна k , масса каждого из шарнирных блоков равна m , все остальные элементы невесомы, трения нигде нет. Когда пружины не деформированы, рейки образуют между собой угол α . Концы этой конструкции соединили между собой, образовав большое кольцо, так, что пружины расположились вокруг цилиндрической поверхности. Получившаяся система колеблется таким образом, что в каждый момент времени все пружины сжаты или растянуты одинаково. Найдите период этих колебаний вокруг положения равновесия, считая их малыми. Система находится в невесомости.

$$\frac{\nu}{\mu \tau} \wedge N = J$$

ЗАДАЧА 25. (*Всеросс., 1997, финал, 11*) Горизонтально расположенная упругая пружина массой M под действием силы, равной её весу Mg , растягивается (или сжимается) на величину Δx_0 .

1) Чему будет равно удлинение данной пружины, если её подвесить за один конец (без груза)?

2) Чему будет равен период колебаний груза массой m , скреплённого с одним из концов данной пружины, если второй конец пружины неподвижен, а груз скользит по гладкой горизонтальной поверхности?

Деформация пружины во всех случаях мала по сравнению с длиной недеформированной пружины.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} kx \quad \left(\frac{\partial U}{\partial x} = kx \right)$$

ЗАДАЧА 26. (*APhO, 2009*)

- [Вращающиеся цилиндры / Rolling Cylinders.](#)
- [Solution.](#)