

Самоиндукция

Пусть через катушку протекает электрический ток I , изменяющийся со временем. Переменное магнитное поле тока I порождает вихревое электрическое поле, которое «циркулирует» вдоль витков катушки и направлено так, чтобы препятствовать изменению тока (если ток возрастает, то напряжённость E вихревого электрического поля направлена против тока, замедляя его возрастание; если ток убывает, то напряжённость E сонаправлена с током, замедляя его убывание).

При прохождении через катушку заряда q вихревое электрическое поле в витках катушки совершает работу A . Величина $\mathcal{E}_i = A/q$ называется *ЭДС индукции* или *ЭДС самоиндукции*. Иными словами, катушка ведёт себя как источник тока с ЭДС \mathcal{E}_i , в котором роль сторонней силы играет сила, действующая на заряды со стороны вихревого электрического поля. При этом ЭДС индукции пропорциональна производной силы тока:

$$\mathcal{E}_i = -L\dot{I}, \quad (1)$$

где коэффициент пропорциональности L называется *индуктивностью* катушки. Знак «минус» в формуле (1) указывает направление ЭДС индукции: если, например, ток течёт в положительном направлении ($I > 0$) и возрастает ($\dot{I} > 0$), то $\mathcal{E}_i < 0$ — катушка-источник препятствует току (как бы встречая его своей положительной клеммой); если же ток убывает ($\dot{I} < 0$), то $\mathcal{E}_i > 0$ — катушка-источник помогает току, встречая его отрицательной клеммой.

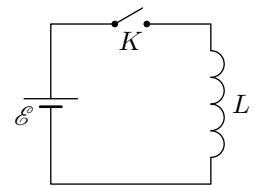
Для контура с катушкой справедливы правила Кирхгофа. При этом сумма напряжений на всех резисторах и конденсаторах контура есть сумма ЭДС источников тока, включённых в контур, плюс ЭДС индукции катушки (формула (1)).

Часто полезно иметь в виду, что напряжение на катушке с нулевым сопротивлением даётся формулой

$$U = L\dot{I}, \quad (2)$$

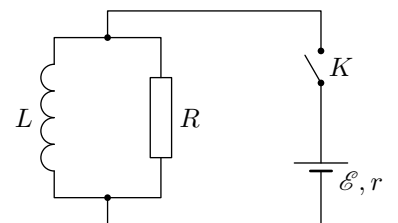
которая вытекает из соотношения $U + \mathcal{E}_i = 0$ (подробнее — в листке «Переменный ток. 1», раздел «Катушка в цепи переменного тока»). Формулу (2) удобно использовать в ситуациях, когда катушка параллельно подключена к резистору или другой катушке.

ЗАДАЧА 1. Катушка индуктивностью L подключена к источнику постоянного тока, ЭДС которого равна \mathcal{E} (см. рисунок). Ключ K вначале разомкнут, и в момент времени $t = 0$ его замыкают. Найдите зависимость силы тока в цепи от времени. Омическим сопротивлением катушки, внутренним сопротивлением источника и сопротивлением проводов пренебречь.



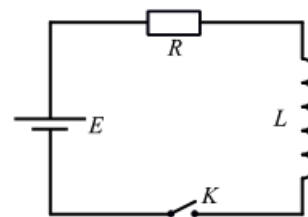
$$\frac{dI}{dt} = I$$

ЗАДАЧА 2. Параллельно соединённые катушка индуктивностью L и резистор сопротивлением R подключены через ключ K к батарее с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r (см. рисунок). В начальный момент времени ключ K разомкнут и тока в цепи нет. Какой заряд протечёт через резистор после замыкания ключа? Сопротивлением катушки пренебречь.



$$\frac{dQ}{dt} = b$$

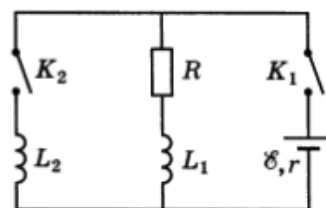
ЗАДАЧА 3. («Физтех», 2019, 11) В электрической цепи (см. рис.) все элементы идеальные, их параметры указаны. Ключ K замыкают.



1. Найти напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа.
2. Найти максимальную скорость изменения энергии N_m в катушке индуктивности.
3. Найти скорость изменения тока в цепи в момент, когда скорость изменения энергии в катушке равна $24/49$ от максимальной скорости N_m .

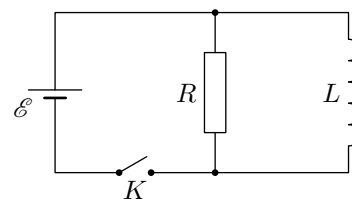
$$\frac{1}{L} \frac{dI}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{I}{\tau} \quad (\tau = \frac{L}{R}) \quad (E = \frac{d\Phi}{dt} = \omega N \quad (\tau = \frac{L}{R} = 0 \Omega \text{ (I})))$$

ЗАДАЧА 4. (Всеросс., 1995, ОЭ, 11) В схеме, изображённой на рисунке, ключи K_1 и K_2 вначале разомкнуты. Ключ K_1 замыкают, и после установления стационарного режима замыкают ключ K_2 . Какой заряд протечёт через резистор R после замыкания ключа K_2 ? Величины R , \mathcal{E} , r , L_1 , L_2 известны. Сопротивлением катушек индуктивности пренебречь.



$$\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \frac{dI}{dt} = b$$

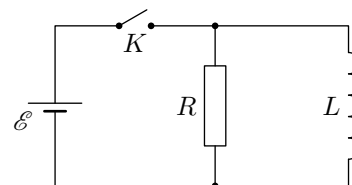
ЗАДАЧА 5. (МФТИ, 2007) В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал. Ключ K замыкают на некоторое время τ , а затем размыкают. Оказалось, что за время, пока ключ был замкнут, через источник протёк заряд q . Найдите время τ .



$$\frac{dI}{dt} - \frac{\mathcal{E}}{L} + \left(\frac{1}{\tau} \right) I = 0$$

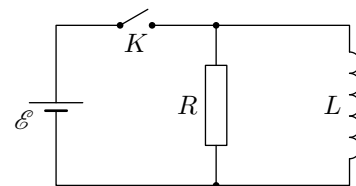
ЗАДАЧА 6. («Физтех», 2008) В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа K ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что после размыкания ключа через катушку протёк заряд q_0 .

- 1) Найдите ток через катушку сразу после размыкания ключа.
- 2) Какой заряд протёк через источник за время, пока ключ был замкнут?



$$\frac{1}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{\tau} = \frac{\mathcal{E}}{L} \quad (\tau = \frac{L}{R}) \quad (I = 0 \text{ (I})))$$

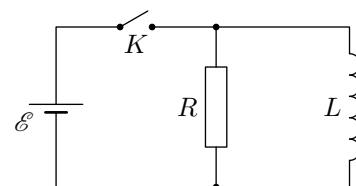
ЗАДАЧА 7. («Физтех», 2008) В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа K ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что после размыкания ключа через резистор протёк заряд q_0 .



- 1) Найдите ток через катушку сразу после размыкания ключа.
- 2) Какой заряд протёк через катушку за время, пока ключ был замкнут?

$$\frac{\mathcal{E}L}{\mathcal{E}R} = \tau b \left(\tau : \frac{\mathcal{E}}{R} \text{ об} = 0 \text{ I} \right)$$

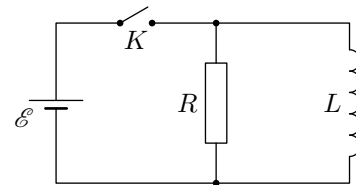
ЗАДАЧА 8. («Физтех», 2008) В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа K ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что пока ключ был замкнут, через источник протёк заряд q_0 .



- 1) На какое время замкнули ключ?
- 2) Какой заряд протёк через резистор после размыкания ключа?

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}} - \frac{\mathcal{E}}{\text{об} \tau \mathcal{E}} + \left(\frac{\mathcal{E}}{\tau} \right) \wedge \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \tau b \left(\tau : \frac{\mathcal{E}}{\tau} - \frac{\mathcal{E}}{\text{об} \tau \mathcal{E}} + \left(\frac{\mathcal{E}}{\tau} \right) \wedge = \mathcal{E} \text{ I} \right)$$

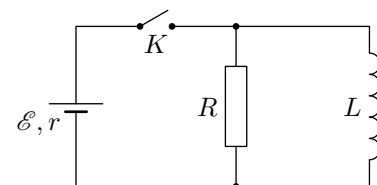
ЗАДАЧА 9. («Физтех», 2008) В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа K ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что за время, пока ключ был замкнут, через катушку протёк заряд q_0 .



- 1) Найдите ток в катушке непосредственно перед размыканием ключа.
- 2) Какой заряд протёк через резистор после размыкания ключа?

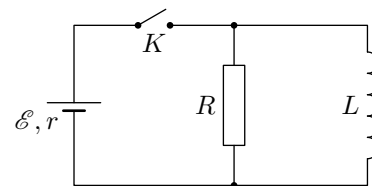
$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E} \text{ об} \tau \mathcal{E}} \wedge = \tau b \left(\tau : \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E} \text{ об} \tau \mathcal{E}} \wedge = \mathcal{E} \text{ I} \right)$$

ЗАДАЧА 10. («Физтех», 2010) Электрическая цепь состоит из батарейки с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r , катушки индуктивностью L и резистора сопротивлением $R = 2r$ (см. рисунок). Ключ K замыкают, а затем размыкают в момент, когда ток через источник равен $\mathcal{E}/(2r)$. Какой заряд протечёт через резистор после размыкания ключа? До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал.



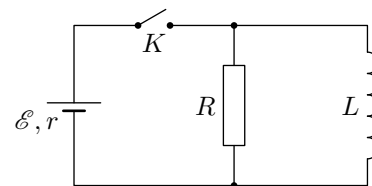
$$\frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{E} \tau} = \tau b$$

ЗАДАЧА 11. («Физтех», 2010) Электрическая цепь состоит из батарейки с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r , катушки индуктивностью L и резистора сопротивлением $R = 4r$ (см. рисунок). Ключ K замыкают, а затем размыкают в момент, когда ток через резистор равен $\mathcal{E}/(6r)$. Какой заряд протечёт через катушку после размыкания ключа? До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал.



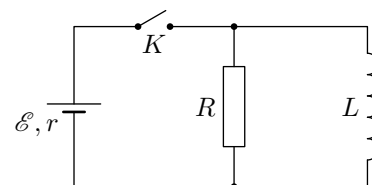
$$\frac{\mathcal{E}^2 L}{\mathcal{E}^2 r} = \mathcal{E} b$$

ЗАДАЧА 12. («Физтех», 2010) Электрическая цепь состоит из батарейки с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r , катушки индуктивностью L и резистора сопротивлением $R = 3r$ (см. рисунок). Ключ K замыкают, а затем размыкают в момент, когда ток через источник равен $\mathcal{E}/(2r)$. Какой заряд протёк через резистор при замкнутом ключе? До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал.



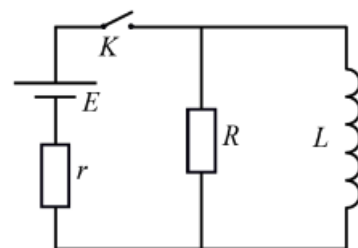
$$\frac{\mathcal{E}^2 L}{\mathcal{E}^2 r} = \mathcal{E} b$$

ЗАДАЧА 13. («Физтех», 2010) Электрическая цепь состоит из батарейки с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r , катушки индуктивностью L и резистора сопротивлением $R = 6r$ (см. рисунок). Ключ K замыкают, а затем размыкают в момент, когда ток через резистор равен $\mathcal{E}/(9r)$. Какой заряд протёк через резистор при замкнутом ключе? До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал.



$$\frac{\mathcal{E}^2 L}{\mathcal{E}^2 r} = \mathcal{E} b$$

ЗАДАЧА 14. («Физтех», 2018, 11) В цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы идеальные, их параметры указаны на схеме, причём $R = 3r$. Ключ K разомкнут, режим в цепи установился. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. К моменту размыкания скорость роста силы тока в катушке индуктивности уменьшается в 2,5 раза.



1) Найти скорость роста силы тока в катушке сразу после замыкания ключа.

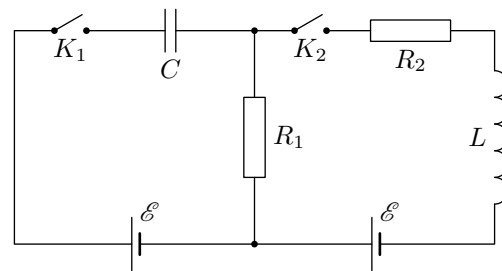
2) Найти силу тока $I_{\mathcal{E}}$ через источник непосредственно перед размыканием ключа.

3) Каковую мощность P развивает источник непосредственно перед размыканием ключа?

$$\frac{\mathcal{E}^2 L}{\mathcal{E}^2 r} = \mathcal{E} \left(\mathcal{E} : \frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{E}^2 r} = \mathcal{E} I \left(\mathcal{E} : \frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{E}^2 r} = 0 \right) \right) \frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{E}^2 r} \quad (1)$$

Задача 15. (МФТИ, 1998) В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке, в начальный момент ключи K_1 и K_2 разомкнуты. Сначала замыкают ключ K_1 , и, когда напряжение на конденсаторе достигает значения $U_0 = \mathcal{E}/2$, замыкают ключ K_2 . Определить:

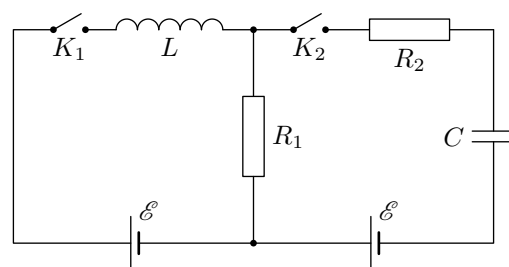
- 1) напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа K_2 ;
 - 2) напряжение на конденсаторе в установившемся режиме.
- Внутреннее сопротивление батарей не учитывать.



$$\frac{\mathcal{E} + U_0}{\mathcal{E}} = \tau \Omega \left(\tau; \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \tau \Omega \right)$$

Задача 16. (МФТИ, 1998) В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке, в начальный момент ключи K_1 и K_2 разомкнуты. Вначале замыкают ключ K_1 . Когда ток через катушку индуктивности достигает значения I_0 , замыкают ключ K_2 . Определить:

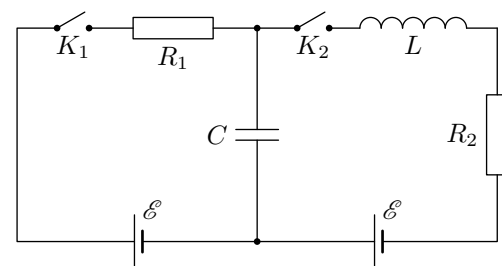
- 1) напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа K_2 ;
 - 2) напряжение на конденсаторе в установившемся режиме.
- Внутреннее сопротивление батарей не учитывать.



$$\mathcal{E} \tau = \tau \Omega \left(\tau; \frac{\mathcal{E} + I_0 R_1}{\mathcal{E}} = \tau \Omega \right)$$

Задача 17. (МФТИ, 1998) В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке, в начальный момент ключи K_1 и K_2 разомкнуты. Сначала замыкают ключ K_1 . Когда напряжение на конденсаторе достигает величины $U_0 = \mathcal{E}/2$, замыкают ключ K_2 . Определить:

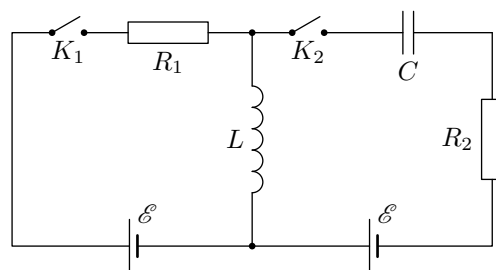
- 1) напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа K_2 ;
 - 2) напряжение на конденсаторе в установившемся режиме.
- Внутреннее сопротивление батарей не учитывать.



$$\frac{\mathcal{E} + U_0}{\mathcal{E}} = \tau \Omega \left(\tau; \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \tau \Omega \right)$$

Задача 18. (МФТИ, 1998) В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке, в начальный момент ключи K_1 и K_2 разомкнуты. Вначале замыкают ключ K_1 . Когда ток через катушку индуктивности достигает значения I_0 , замыкают ключ K_2 . Определить:

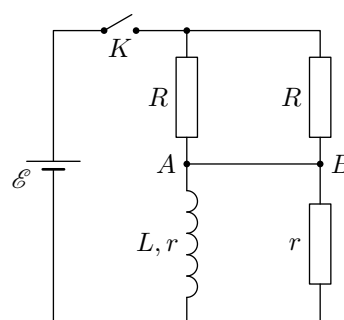
- 1) напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа K_2 ;
 - 2) напряжение на конденсаторе в установившемся режиме.
- Внутреннее сопротивление батарей не учитывать.



$$\varphi = \omega L \left(\tau : \frac{\varepsilon_2 + \tau I}{\varepsilon_1 \tau I_0 - (\tau I - \varepsilon_2) \varphi} = \tau I \right)$$

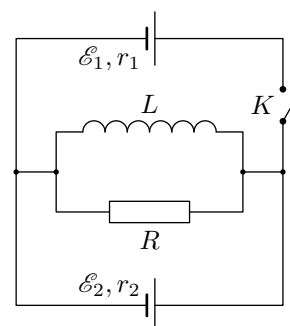
Задача 19. (МФТИ, 2001) В схеме, изображённой на рисунке, в начальный момент ключ K разомкнут. Катушка с индуктивностью L обладает омическим сопротивлением r . Какой заряд протечёт через перемычку AB после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи и сопротивлением перемычки пренебречь. Параметры схемы указаны на рисунке.

$$\frac{(\varepsilon + r) \tau \varepsilon}{L} = \varphi$$



Задача 20. (МФТИ, 1993) В схеме, изображённой на рисунке, в начальный момент ключ K разомкнут, а в замкнутом контуре схемы течёт установившийся ток. Определить величину и направление тока через резистор R сразу после замыкания ключа K . Параметры схемы: $\varepsilon_1 = 10$ В, внутреннее сопротивление $r_1 = 5$ Ом, внутреннее сопротивление второй батареи $r_2 = 20$ Ом, сопротивление резистора $R = 4$ Ом.

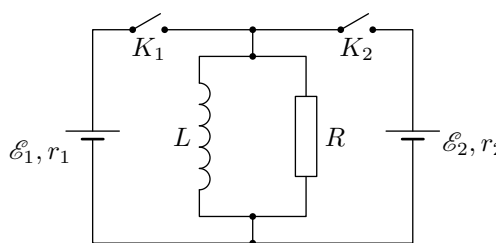
$$I R = \frac{\varepsilon_1 r_2 + (\varepsilon_2 + r_2) \varepsilon}{\varepsilon_1 r_2} = \varepsilon I$$



Задача 21. (МФТИ, 2005) В электрической схеме, представленной на рисунке, ключи K_1 и K_2 разомкнуты. Ключ K_1 замыкают, и после того, как через резистор с сопротивлением R протёк заряд q_0 , замыкают ключ K_2 .

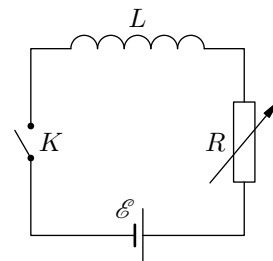
- 1) Найти напряжение на катушке индуктивностью L непосредственно перед замыканием ключа K_2 .
- 2) Найти дополнительный заряд, протекший через резистор после замыкания ключа K_2 .

ЭДС батарей ε_1 и ε_2 и их внутренние сопротивления r_1 и r_2 известны.



$$\left(\omega \frac{\tau}{R} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\tau}{\varepsilon_1} \right) \frac{\varepsilon}{\tau} = b \nabla \left(\tau : \left(\frac{\tau}{\omega r_1 R} - \tau \varphi \right) \frac{\tau + \varepsilon}{R} = \tau I \right)$$

Задача 22. (МФТИ, 1997) Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС \mathcal{E} , катушки индуктивности L и переменного сопротивления, начальное значение которого равно R_0 (см. рисунок). Через некоторое время после замыкания ключа K напряжение на катушке равно U_0 . Начиная с этого момента времени сопротивление R меняется таким образом, что напряжение на катушке остаётся постоянным и равным U_0 .



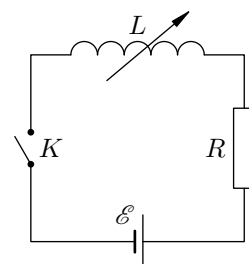
1) Определить напряжение на катушке сразу после замыкания ключа K .

2) Найти зависимость сопротивления от времени.

Внутреннее сопротивление батареи не учитывать.

$$U_0 = \mathcal{E} \left(1 - \frac{U_0}{\mathcal{E}} \frac{L}{R_0} \right) \quad \tau = \frac{L}{R_0} \quad (1)$$

Задача 23. (МФТИ, 1997) Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС \mathcal{E} , сопротивления R и катушки переменной индуктивности, начальное значение которой равно L_0 (см. рисунок). Через некоторое время после замыкания ключа K на катушке падает напряжение U_0 . Начиная с этого момента времени индуктивность катушки изменяется таким образом, что напряжение на катушке остаётся постоянным и равным U_0 .



1) Определить напряжение на катушке сразу после замыкания ключа K .

2) Найти зависимость индуктивности катушки от времени.

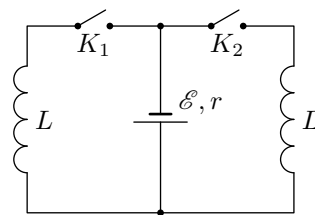
Внутреннее сопротивление батареи не учитывать.

$$U_0 = \mathcal{E} \left(1 - \frac{U_0}{\mathcal{E}} \frac{L_0}{R} \right) \quad \tau = \frac{L_0}{R} \quad (1)$$

Задача 24. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) Катушка индуктивности помещена между полюсами электромагнита так, что ось катушки совпадает с направлением индукции магнитного поля, которое почти однородно. Индуктивность катушки $L = 1$ мГн, а площадь ее поперечного сечения $S = 2$ см². Выводы обмотки соединили проводом, проходящим в плоскости, проходящей через ось катушки. Общее сопротивление обмотки и провода $R = 20$ Ом. Ток в обмотке электромагнита плавно изменяется. За время, в течение которого поле электромагнита увеличилось на $\Delta B = 3$ Тл, сила тока в катушке увеличилась на $\Delta I = 0,1$ А. Какой заряд прошел за это время по проводу? Число витков катушки $N = 6$.

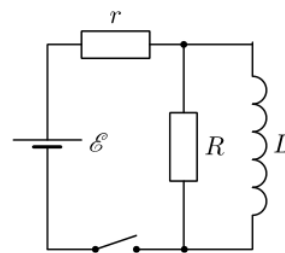
$$q = \frac{L \Delta I}{R} = \frac{1 \cdot 0,1}{20} = 0,005 \text{ Кл} \quad (1)$$

ЗАДАЧА 28. (МФТИ, 1981) Две катушки одинаковой индуктивностью L подключены через ключи K_1 и K_2 к источнику с постоянной ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r (см. рисунок). В начальный момент ключи разомкнуты. Затем замыкают ключ K_1 . Определите силу тока, протекающего через ключ K_1 перед замыканием ключа K_2 , если известно, что установившаяся сила тока через ключ K_1 после замыкания ключа K_2 в два раза больше установившейся силы тока через ключ K_2 . Сопротивлениями катушек пренебречь.



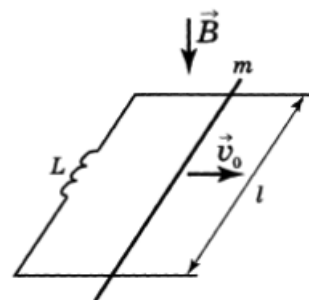
$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$$

ЗАДАЧА 29. («Физтех», 2014) В схеме, изображённой на рисунке, $\mathcal{E} = 7 \text{ В}$, $R = 6r$. После замыкания ключа происходит процесс установления режима постоянного тока. Найдите напряжение на катушке в момент, когда скорость изменения её энергии была максимальна.



$$U = \frac{2(R+r)\mathcal{E}}{R} = 3 \text{ В}$$

ЗАДАЧА 30. (Всеросс., 1999, ОЭ, 11) Параллельные проводящие неподвижные шины расположены в горизонтальной плоскости на расстоянии l друг от друга (рис.). Однородное магнитное поле индукцией B направлено вертикально. К шинам подсоединена катушка индуктивностью L . По шинам может скользить без трения проводящая перемычка массой m , оставаясь перпендикулярной шинам и не теряя с ними электрического контакта. В некоторый момент перемычке сообщают скорость v_0 вдоль шин.



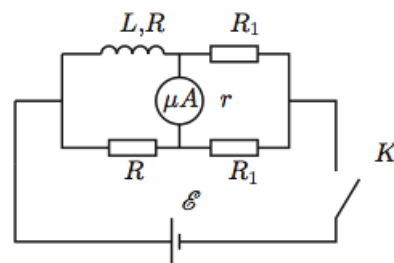
1) Опишите движение перемычки и найдите характерное время её движения.

2) На какое максимальное расстояние сможет удалиться перемычка от первоначального положения?

Сопротивлением катушки, шин, перемычки и подводящих проводов пренебречь.

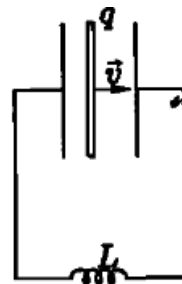
$$\frac{1}{L} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = V \left(\frac{2}{L} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right) \sqrt{2} = J \quad (1)$$

ЗАДАЧА 31. (Всеросс., 2000, финал, 11) В электрической цепи с мостиком Уитстона, изображённой на рисунке, после установления всех токов размыкают ключ K . Определите, при какой величине сопротивлений R_1 через микроамперметр с внутренним сопротивлением r после размыкания ключа K протечет наибольший заряд Q . Все остальные параметры электрической цепи, указанные на рисунке, считать заданными. Внутренним сопротивлением источника напряжения и сопротивлением соединительных проводов пренебречь.



$$R_1 = R \sqrt{\frac{2R+r}{r}}$$

ЗАДАЧА 32. (Всеросс., 2002, финал, 11) С одной из пластин изначально незаряженного конденсатора мгновенно отделяется тонкий слой вещества, несущий заряд q . Затем он движется поступательно как целое с постоянной скоростью v по направлению к противоположной пластине (рис.). Найдите зависимость тока в цепи от времени, пока слой движется в конденсаторе. Расстояние между пластинами конденсатора D , площадь поперечного сечения пластин S , индуктивность катушки L .



$$\frac{\partial S^0 z}{\partial t} \Lambda = \frac{\partial \epsilon \epsilon_0}{\partial t} (q \cos \alpha - 1) \frac{q}{ab} = I$$

Вычисление индуктивности

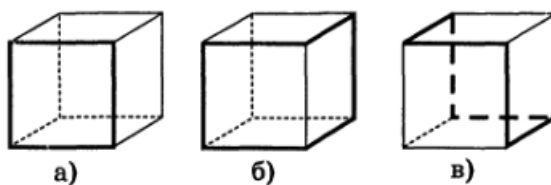
ЗАДАЧА 33. Найдите индуктивность катушки длиной l с числом витков N и площадью витка S .

$$\frac{l}{S \epsilon N^2 \mu_0} = \mathcal{L}$$

ЗАДАЧА 34. (Всеросс., 2005, финал, 11) Сверхпроводящий соленоид длиной $l = 10$ см и площадью поперечного сечения $S = 1,6$ см² имеет $N = 1000$ витков. В некоторый момент соленоид подключают к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 24$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,2$ Ом. Известно, что при индукции магнитного поля $B_0 = 1,26$ Тл состояние сверхпроводимости обмотки соленоида разрушается. Определите, перейдёт ли в этом эксперименте обмотка соленоида из сверхпроводящего в нормальное состояние, и если да, то через какое время t_0 после подключения, а если нет, то при какой ЭДС \mathcal{E} источника переход бы произошёл. Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ единиц СИ.

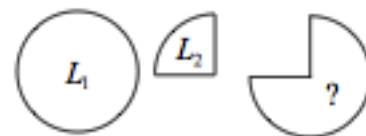
$$\text{или } \mathcal{L} \approx \left(\frac{\mathcal{E} N^2 \mu_0 l}{4 \pi^2 \mathcal{E}} - 1 \right) \text{ или } \frac{4 \pi^2}{S \epsilon N^2 \mu_0} - = 0 \text{ или } \mathcal{E} \mathcal{L}$$

ЗАДАЧА 35. (Межреспубл., 1992, 11; «Росатом», 2011, 11) Виток тонкого провода, имеющий форму квадрата, обладает индуктивностью L_1 (рис. а). Виток из такого же провода, идущего по рёбрам куба, как это показано на рис. б, имеет индуктивность L_2 . Найдите индуктивность показанного на рис. в витка из такого же провода. (Витки на рисунках выделены толстыми линиями.)



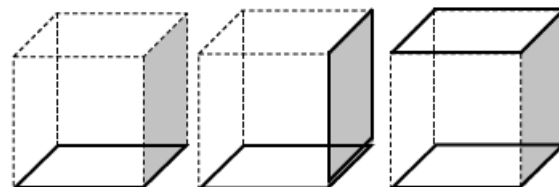
$$(L_1 - L_2) \mathcal{E} = \mathcal{I}$$

ЗАДАЧА 36. («Росатом», 2011, 11) Индуктивность кольца известна и равна L_1 . Индуктивность контура, представляющего собой сектор кольца того же радиуса, опирающийся на угол $\pi/2$, также известна и равна L_2 . Найти индуктивность контура, представляющего сектор кольца того же радиуса, опирающийся на угол $3\pi/2$.



$$\varepsilon L + \nu L \frac{\varepsilon}{\nu} = L$$

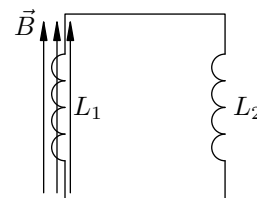
ЗАДАЧА 37. («Росатом», 2018, 11) Индуктивность замкнутого квадратного витка, сделанного из тонкой проволоки, равна L (левый рисунок). Если рядом с этим витком перпендикулярно его плоскости и без электрического контакта с ним расположить точно такой же по размеру, но сверхпроводящий виток (так, что они образуют соседние грани куба), то индуктивность первого витка станет равна L_1 (средний рисунок). Какой будет индуктивность витка, если сверхпроводящий виток расположить параллельно его плоскости так, что они образуют с первым противоположные грани куба?



$$\left(\left(\frac{\varepsilon}{\nu} - 1 \right) \wedge \left(\nu - 1 \right) - 1 \right) L = \varepsilon L$$

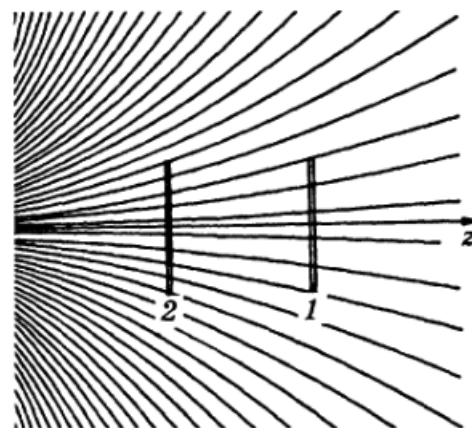
Сохранение магнитного потока в сверхпроводящем контуре

ЗАДАЧА 38. (МФТИ, 1982) Катушка из n_1 витков, площадь каждого из которых равна S , расположена в однородном магнитном поле с индукцией B , которая направлена перпендикулярно виткам катушки. Вне поля расположена вторая катушка (см. рисунок). Обе катушки соединены проводниками. Пренебрегая омическим сопротивлением катушек и проводников, определить величину тока, возникающего в катушках после выключения поля. Индуктивности катушек равны L_1 и L_2 .



$$\frac{\varepsilon L + \nu L}{\varepsilon S \nu} = I$$

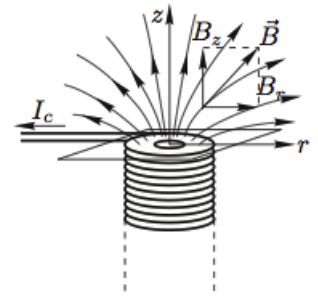
ЗАДАЧА 39. (Всеросс., 1993, финал, 11) Вдали от катушки с круглым цилиндрическим железным сердечником находится кольцо из сверхпроводящего материала. Ток в кольце равен нулю. На рисунке изображены линии индукции магнитного поля вблизи торца катушки; ось z является осью симметрии магнитного поля катушки. Кольцо вносят в магнитное поле катушки. Сначала кольцо занимает положение 1, а затем — положение 2.



1) Определите отношение I_1/I_2 силы тока, протекающего в кольце, когда оно находится в положении 1, к силе тока в кольце, когда оно находится в положении 2.

2) Определите соотношение сил F_1/F_2 , действующих на кольцо в обоих положениях, и укажите направление действия этих сил.

$$B_z \approx \frac{\mu_0 n I}{2} \left(1 - \frac{z}{R}\right), \quad B_r \approx \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{z}{R}$$



ЗАДАЧА 40. (Всеросс., 2006, финал, 11) У торца вертикально расположенного длинного соленоида на тонком немагнитном листе лежит соосно с соленоидом круглое тонкое кольцо из сверхпроводника (рис.). В начальном состоянии сила тока в витках соленоида и сила тока в кольце равны нулю. При протекании тока по виткам соленоида вблизи торца возникает неоднородное магнитное поле. Вертикальную B_z и радиальную B_r составляющие вектора магнитной индукции \vec{B} можно в некоторой ближней области задать с помощью соотношений $B_z \approx B_0(1 - \alpha z)$, $B_r \approx B_0 \beta r$, где α и β — некоторые константы, а B_0 определяется силой тока в соленоиде. По виткам соленоида начинают пропускать ток силой I , постепенно увеличивая его значение. Определите:

1) критическое значение силы тока I_0 в соленоиде, при котором кольцо начинает подниматься над опорой;

2) высоту кольца над опорой при $I = 2I_0$;

3) частоту малых колебаний сверхпроводящего кольца при $I = 2I_0$.

Числовые данные: $\alpha = 36 \text{ м}^{-1}$, $\beta = 18 \text{ м}^{-1}$, масса кольца $m = 100 \text{ мг}$, коэффициент самоиндукции кольца $L = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ Гн}$, площадь кольца $S = 1 \text{ см}^2$, магнитная постоянная $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$, плотность намотки соленоида $n = 10^3 \text{ м}^{-1}$.

$$m g = \frac{\mu_0 n^2 I^2 S}{2} \left(1 - \frac{\alpha z}{2}\right) \quad \text{и} \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\mu_0 n^2 I^2 S \alpha}{2m} z$$

ЗАДАЧА 41. (Всеросс., 1997, финал, 11) В сверхпроводящем тонком кольце радиусом R , индуктивностью L и массой M течёт наведённый ток I_0 . Кольцо, подвешенное на тонкой неупругой нити, опускают в область горизонтального однородного магнитного поля индукцией B . В устойчивом положении равновесия угол между вектором \vec{B} и его проекцией на плоскость кольца равен α .

1) Найти зависимость угла α от начального тока I_0 в кольце и построить график $\alpha = \alpha(I_0)$.

2) Найти зависимость установившейся силы тока I в кольце от величины начальной силы тока I_0 и построить график $I = I(I_0)$.

3) Для случая, когда $I_0 > \frac{\pi R^2 B}{L}$, определить минимальную работу, которую необходимо совершить, чтобы вынуть кольцо из магнитного поля.

$$I = \frac{M g}{\pi R^2 B}$$

Электромагнитный тормоз

Данный раздел посвящён решению красивой задачи, которая была предложена 11-классникам на заключительном этапе Всероссийской олимпиады в 2008 году. Мы обсудим два подхода:

- динамический — пишем второй закон Ньютона для груза и уравнение динамики вращательного движения $I\dot{\omega} = \mathcal{M}$ для цилиндра;
- энергетический — дифференцируем закон сохранения энергии.

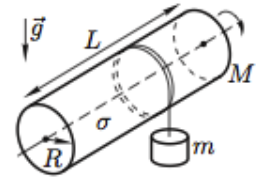
ЗАДАЧА 42. Опробуйте оба подхода на примере следующей простой задачи. Груз массы m подвешен на невесомой нити, намотанной на тонкостенный цилиндр массы M . Ось цилиндра горизонтальна, и цилиндр может вращаться вокруг неё без трения. Найти ускорение груза.

$$\frac{m + M}{b u} = v$$

Задача 43. Вспомните, как из формулы энергии конденсатора $W = \frac{CU^2}{2}$ получается выражение для объёмной плотности энергии электрического поля $w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$. Аналогично, из формулы энергии катушки $W = \frac{LI^2}{2}$ выведите выражение для объёмной плотности энергии магнитного поля $w = \frac{B^2}{2\mu_0}$.

После этих упражнений можно наконец переходить к обещанной задаче.

Задача 44. (*Всеросс., 2008, финал, 11*) На длинном тонкостенном диэлектрическом цилиндре радиуса R , длины $L \gg R$ и массы M размещён электрический заряд одинаковой поверхностной плотностью σ . Цилиндр может свободно (без трения) вращаться вокруг своей оси под действием груза массы m , подвешенного на невесомой нити, намотанной на цилиндр (рис.). Определите ускорение груза.



Магнитную постоянную μ_0 считать заданной.

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 \sigma^2 2\pi R L + \frac{1}{2} \mu_0 I^2 L = v$$

Международные олимпиады

Задача 45. (*APhO, 2009*)

- [Самовозбуждающееся магнитное динамо / A Self-excited Magnetic Dynamo.](#)
- [Solution.](#)

Задача 46. (*APhO, 2017*)

- [Вихри в сверхтекучей жидкости / Vortices in superfluid.](#)
- [Solution.](#)

Ответ к задаче 41

$$1) \alpha = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{LI_0}{\pi R^2 B}\right), & \text{если } I_0 < \frac{\pi R^2 B}{L}; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } I_0 \geq \frac{\pi R^2 B}{L} \end{cases}$$

$$2) I = \begin{cases} 0, & \text{если } I_0 < \frac{\pi R^2 B}{L}; \\ I_0 - \frac{\pi R^2 B}{L}, & \text{если } I_0 \geq \frac{\pi R^2 B}{L} \end{cases}$$

$$3) A = 2MgR + \pi R^2 B \left(I_0 - \frac{\pi R^2 B}{2L} \right)$$