

## Равновесие тел

### Содержание

1	Всероссийская олимпиада школьников по физике . . . . .	2
2	Московская олимпиада школьников по физике . . . . .	5
3	«Физтех» . . . . .	9
4	«Росатом» . . . . .	10
5	«Курчатов» . . . . .	11

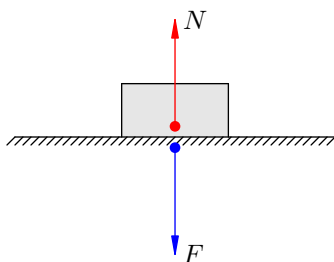
Предположим, что к твёрдому телу приложены силы со стороны других тел. Для того, чтобы тело при этом находилось в равновесии, должны выполняться следующие два условия.

1. *Силы уравновешены.* Например, сумма приложенных к телу сил, направленных вверх, равна сумме сил, направленных вниз.
2. *Моменты сил уравновешены.* Иными словами, сумма моментов сил, вращающих тело по часовой стрелке, равна сумме моментов сил, вращающих тело против часовой стрелки. (Моменты всех сил вычисляются относительно одной фиксированной оси, выбор которой произволен и диктуется только соображениями удобства.)

Также нужно знать, что «действие равно противодействию»; точнее говоря, имеет место *третий закон Ньютона*.

**Третий закон Ньютона.** Два тела действуют друг на друга с силами, равными по абсолютной величине и противоположными по направлению.

Пусть, например, карандаш лежит на столе (см. рисунок).



Карандаш давит на стол с силой  $F$ . Эта сила приложена к столу и направлена вниз. Стол деформируется и действует на карандаш с силой упругости  $N$ . Эта сила приложена к карандашу и направлена вверх.

**ЗАДАЧА 1.** Однородный стержень  $AB$  массой 1 кг лежит концами на двух опорах, покоясь в горизонтальном положении. Найдите силу давления стержня на каждую из опор.

$$\boxed{H \xi = \varrho J = \nu J}$$

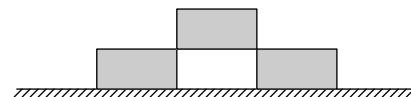
**ЗАДАЧА 2.** Очень лёгкий стержень  $AB$  лежит концами на двух опорах, покоясь в горизонтальном положении. В точке  $C$  стержня, такой, что  $AC : CB = 1 : 2$ , находится точечный груз массой 300 г. Найдите силу давления стержня на каждую из опор.

$$\boxed{H \tau = \varrho J \quad H \zeta = \nu J}$$

ЗАДАЧА 3. Однородный стержень  $AB$  массой  $1\text{ кг}$  лежит концами на двух опорах, покоясь в горизонтальном положении. В точке  $C$  стержня, такой, что  $AC : CB = 1 : 2$ , находится точечный груз массой  $300\text{ г}$ . Найдите силу давления стержня на каждую из опор.

$$N_1 = \frac{2}{3}mg \quad N_2 = \frac{1}{3}mg$$

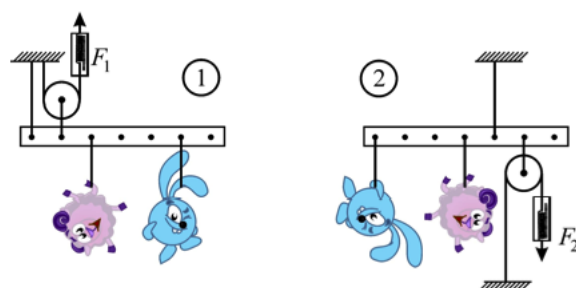
ЗАДАЧА 4. Три одинаковых кирпича массой  $m$  расположены на горизонтальной поверхности так, как показано на рисунке. С какой силой каждый из нижних кирпичей давит на поверхность?



$$\frac{2}{3}mg$$

## 1 Всероссийская олимпиада школьников по физике

ЗАДАЧА 5. (Всеросс., 2013, ШЭ, 8) Узнав прелесть экспериментальной физики, Нюша стала совершенствоваться в этой области. Больше всего ей понравилась тема «Простые механизмы» — ведь они ПРОСТЫЕ! Для своих экспериментов она выбрала: 1) лёгкий блок, в оси которого отсутствовало трение; 2) лёгкую рейку, имеющую отверстия, находящиеся на одинаковом расстоянии друг от друга; 3) динамометр (уж больно он был похож на весы!); 4) лёгкую, нерастяжимую верёвку; 5) жёсткий стержень для подвешивания рейки к потолку; 6) Бараша и Кроша.

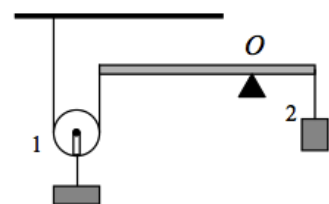


Она наслаждалась, уравнивая рейку посредством перемещения точек подвеса Кроша, Бараша, опоры и динамометра. Схема её двух экспериментов представлена на рисунках 1 и 2.

Учитывая, что все смешарики весят одинаково (их вес равен  $P = 1\text{ Н}$ ), определите разность показаний динамометра  $\Delta F$ .

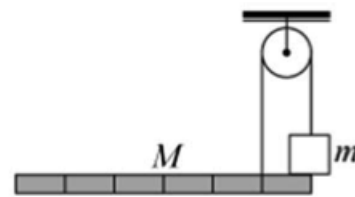
$$1\text{ Н}$$

ЗАДАЧА 6. (Всеросс., 2015, ШЭ, 8) На каком расстоянии от левого конца невесомого рычага нужно разместить точку  $O$  опоры, чтобы рычаг находился в равновесии (см. рисунок)? Длина рычага  $L = 60\text{ см}$ , масса первого груза вместе с блоком  $m_1 = 2\text{ кг}$ , масса второго груза  $m_2 = 3\text{ кг}$ .



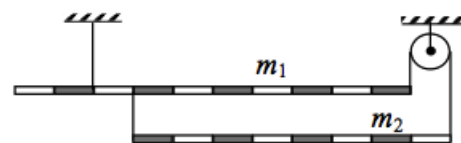
$$45\text{ см}$$

ЗАДАЧА 7. (Всеросс., 2017, ШЭ, 8) К концам лёгкой нити, перекинутой через блок, с одной стороны прикреплена однородная планка с нарисованными на ней делениями, а с другой — груз, опирающийся на конец планки и имеющий массу  $m = 10$  кг. Определите, при какой массе планки  $M$  система будет находиться в равновесии. Чему при этом будет равен модуль силы натяжения нити? Трения в оси блока нет. Все необходимые расстояния можно получить из рисунка. Модуль ускорения свободного падения можно считать равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



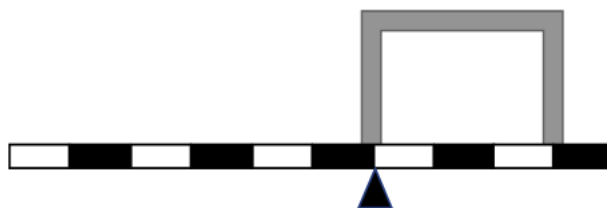
$$Mg = 6T \quad \text{и} \quad T = \frac{mg}{2} = 50 \text{ Н}$$

ЗАДАЧА 8. (Всеросс., 2018, ШЭ, 8) Система, состоящая из двух однородных стержней разной плотности, находится в равновесии. Масса верхнего стержня  $m_1 = 1,4$  кг. Трение пренебрежимо мало. Определите, при какой массе  $m_2$  нижнего стержня возможно такое равновесие.



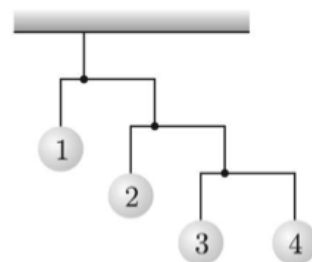
$$m_1 g \cdot \frac{l}{2} = m_2 g \cdot \frac{l}{2}$$

ЗАДАЧА 9. (Всеросс., 2019, ШЭ, 8) Изогнутая в виде буквы П однородная деталь массой  $2m$  находится в равновесии на массивном однородном рычаге, как показано на рисунке. Найдите массу рычага.



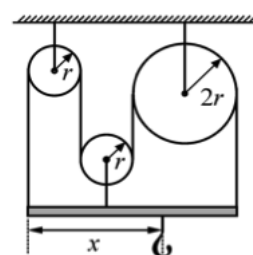
$$m g = 2m g$$

ЗАДАЧА 10. (Всеросс., 2019, МЭ, 8) На рисунке изображена подвесная игрушка, состоящая из горизонтальных стержней и прикрепленных к ним на нитях шариков. Найдите массы шариков с номерами 2, 3 и 4, если масса шарика с номером 1 равна 96 г. Короткие плечи всех стержней составляют  $1/4$  от длин соответствующих стержней. Стержни и нити считать невесомыми.



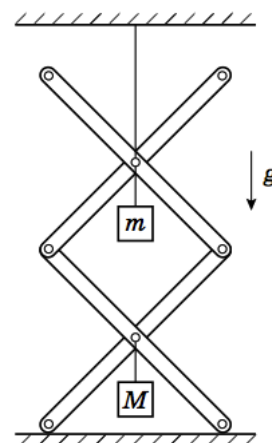
$$m_2 g = 2 \cdot \frac{1}{4} m_1 g = \frac{1}{2} m_1 g = 48 \text{ г}$$

ЗАДАЧА 11. (Всеросс., 2015, МЭ, 8–10) В системе, изображённой на рисунке, блоки, нить и стержень невесомы. Правый блок в два раза больше по размеру, чем другие два. Участки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. На крючок повесили груз некоторой массы, при этом система осталась неподвижна. Определите, чему равно отношение  $x/r$ .



$$\frac{x}{r} = 3$$

ЗАДАЧА 12. («Максвелл», 2018, 3Э, 7) Шарнирная конструкция, состоящая из четырёх лёгких одинаковых стержней, удерживается нитью, привязанной к потолку, и опирается на гладкую горизонтальную поверхность. Если к шарнирам, соединяющим центры стержней, подвесить грузы массой  $m$  и  $M$ , как показано на рисунке, сила натяжения нити окажется равной  $T_1 = 30$  Н. При уменьшении массы верхнего груза вдвое сила натяжения верхней нити уменьшится до  $T_2 = 20$  Н. Определите массы грузов  $m$  и  $M$  и силы реакции  $N$ , действующие на стержни со стороны горизонтальной поверхности.



Ускорение свободного падения  $g = 10$  Н/кг. Трением в шарнирах можно пренебречь.

$$N \cos \alpha = \frac{mg}{2} = N \sin \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{mg}{2N} = \frac{m}{2N} \Rightarrow \alpha = \arctan \left( \frac{m}{2N} \right)$$

ЗАДАЧА 13. («Максвелл», 2017, РЭ, 8) На двух нитях висит однородный стержень массы  $M$ . К его левому краю прикреплена нить, перекинутая через подвижный блок, который удерживает груз (рис.). При каких значениях массы  $m$  этого груза система будет находиться в равновесии? Массой блока и нитей можно пренебречь. Отметки на стержне делят его на семь равных частей.

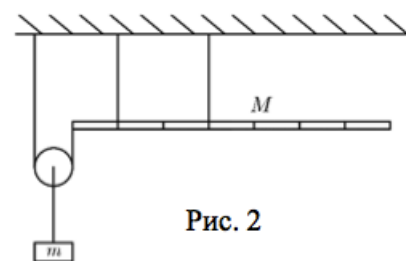
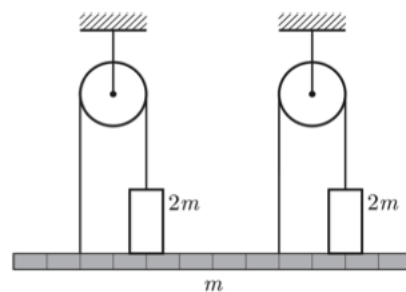


Рис. 2

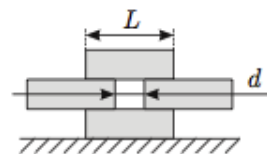
$$N \cos \alpha = mg \Rightarrow \alpha = \arccos \left( \frac{mg}{N} \right)$$

ЗАДАЧА 14. («Максвелл», 2015, 8) Планка массой  $m$  и два одинаковых груза массой  $2m$  каждый с помощью лёгких нитей прикреплены к двум блокам (см. рисунок). Система находится в равновесии. Определите силы натяжения нитей и силы, с которыми подставка действует на грузы. Трения в осях блоков нет.



$$T \cos \alpha = 2mg \Rightarrow T = \frac{2mg}{\cos \alpha}$$

ЗАДАЧА 15. («Максвелл», 2013, 8) Четыре одинаковых ледяных бруска длиной  $L$  сложены так, как показано на рисунке. Каким может быть максимальное расстояние  $d$  при условии, что все бруски расположены горизонтально?



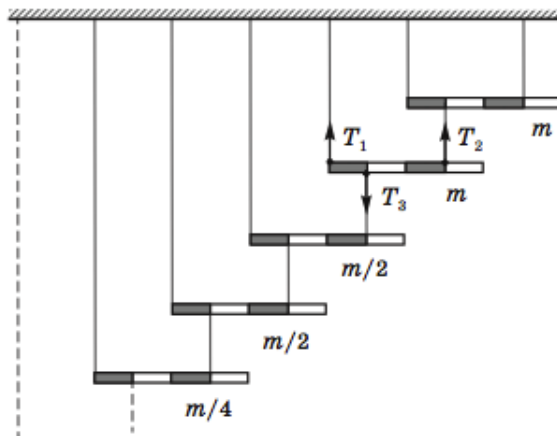
Считайте, что бруски гладкие (между ними нет трения), и что сила тяжести приложена к центру соответствующего бруска.

$$\frac{d}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ЗАДАЧА 16. («Максвелл», 2012, 8) Кусок проволоки длиной  $L$  согнули в виде прямоугольного треугольника. Длина одной из его сторон (катета)  $a = 20$  см. К этой стороне привязали нить на расстоянии  $d = 5,5$  см от прямого угла. При этом треугольник повис так, что сторона  $a$  оказалась горизонтальной. Вычислите длину проволоки  $L$ .

$$L = \frac{a^2}{2d} = 220 \text{ см}$$

ЗАДАЧА 17. («Максвелл», 2019, 3Э, 8) На рисунке приведена схема очень длинной подвесной лестницы. Массы каждой из двух первых ступеней равны  $m$ , а в последующих парах массы ступеней уменьшаются в два раза по отношению к предыдущим ( $m/2, m/4, m/8, \dots$ ). Определите силы натяжения тросов  $T_1, T_2$  и  $T_3$ , действующих на вторую ступень, считая все ступени однородными, а тросы легкими. На рисунке каждая ступень разделена на четыре одинаковые части.



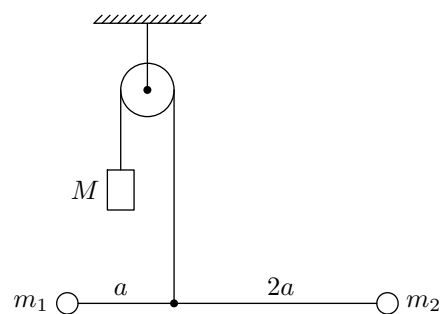
$$6m \frac{L}{8} = \varepsilon_L : 6m \frac{L}{4} = \tau_L : 6m \frac{L}{1} = \tau_L$$

ЗАДАЧА 18. («Максвелл», 2021, 3Э, 8) К левому концу неоднородного стержня, шарнирно закреплённого на неподвижной опоре, подвешен груз массой  $m_1$ , а к правому концу стержня — груз массой  $m_2 = 4,0$  кг. Система находится в равновесии. Затем груз массой  $m_2$  убрали, на его место перенесли груз массой  $m_1$ , а на левый конец подвесили груз массой  $m_3 = 2,5$  кг, и система снова оказалась в равновесии. Определите, при каких значениях массы  $m_1$  это возможно. Известно, что центр масс стержня находится справа от точки опоры.

$$2,5 \text{ кг} < m_1 < 4 \text{ кг}$$

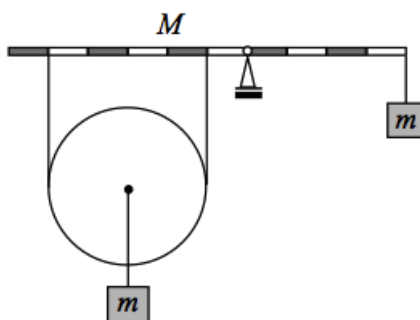
## 2 Московская олимпиада школьников по физике

ЗАДАЧА 19. (МОШ, 2013, 8) На рисунке изображён лёгкий жёсткий стержень длиной  $3a$ , к которому на расстоянии  $a$  от одного из концов прикреплена невесомая нить, перекинутая через блок. К противоположному концу нити прикреплен груз массой  $M = 3$  кг. К концам стержня прикреплены грузы 1 и 2. Найдите массы  $m_1$  и  $m_2$  этих грузов, если система находится в равновесии и трения в оси блока нет.



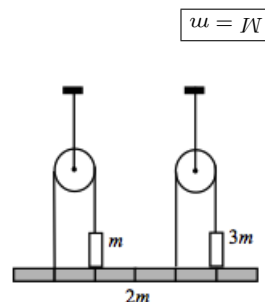
$$m_1 = \varepsilon/M = 2m, \quad m_2 = \varepsilon/M = 1m$$

ЗАДАЧА 20. (МОШ, 2018, 8) При какой массе  $M$  однородного рычага возможно равновесие системы, показанной на рисунке? Масса грузов равна  $m$ . Блок и нити невесомы.



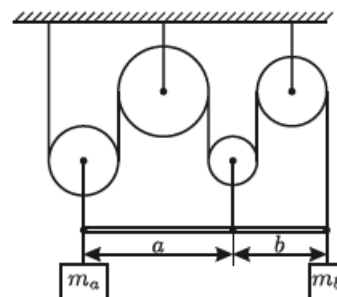
ЗАДАЧА 21. (МОШ, 2018, 8) Однородная доска имеет массу  $2m$ . Массы грузов  $m$  и  $3m$ . Блоки и нити невесомы, трения в осях блоков нет. Блоки подвешены к потолку. Система находится в равновесии. Определите силу, с которой груз  $m$  действует на доску.

$$\frac{\xi}{\beta u} = d$$



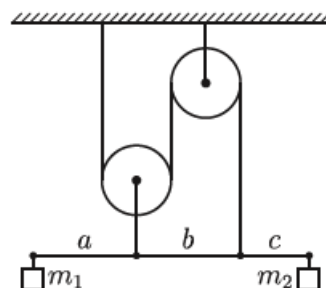
ЗАДАЧА 22. (МОШ, 2009, 8) Изображённая на рисунке система из рычага и блоков находится в равновесии. Точки подвеса делят рычаг в отношении  $a : b$ . Найдите отношение масс грузов  $m_a : m_b$ , пренебрегая массами рычага, блоков и веревок, а также трением.

$$\frac{q + v\xi}{q\tau + v\zeta} = \frac{qu}{v\mu}$$



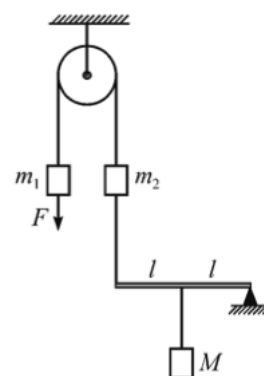
ЗАДАЧА 23. (МОШ, 2008, 8) Рычаг подвешен к системе блоков так, что точки подвеса делят его в отношении  $a : b : c$  (см. рисунок). Блоки и нити невесомы, трения нет. Каково отношение масс грузов  $m_1$  и  $m_2$ , если система находится в равновесии?

$$\frac{q + v\xi}{v\xi + q\zeta} = \frac{\tau u}{v\mu}$$



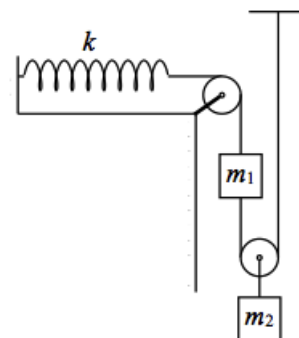
ЗАДАЧА 24. (МОШ, 2015, 8) С какой вертикально направленной силой  $F$  следует удерживать груз массой  $m_1$  для того, чтобы изображённая на рисунке конструкция из блока, невесомых нитей, лёгкого стержня и грузов находилась в равновесии? Массы грузов  $m_1 = 1$  кг,  $m_2 = 2$  кг,  $M = 3$  кг. Трения в оси блока нет. Ускорение свободного падения принять равным  $10$  м/с<sup>2</sup>.

$$H \xi \zeta = \delta \left( \frac{\zeta}{M} + \tau u - \tau u \right) = \mathcal{J}$$



Задача 25. (МОШ, 2019, 8) Система, состоящая из двух грузов массами  $m_1 = 2$  кг и  $m_2 = 3$  кг, легкой пружины жесткостью  $k = 350$  Н/м, невесомых нитей и блоков, находится в покое (см. рис.). Найдите деформацию пружины. Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Ответы выразите в см и округлите до целых.

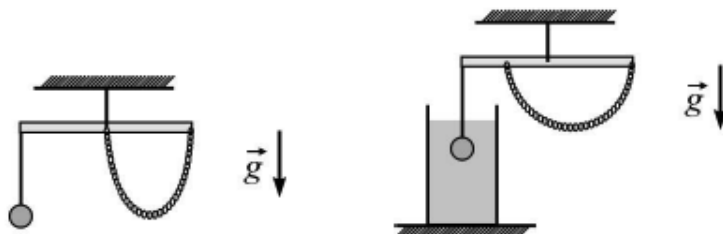
10 см



Задача 26. (МОШ, 2011, 8) Металлическая плоская линейка имеет малую одинаковую всюду толщину, одинаковую по всей длине ширину и длину, равную 50 см. На концах линейки находятся отметки: 0 см и 50 см. Линейку согнули под прямым углом. Место сгиба приходится на отметку 40 см. За какое место нужно подвесить на тонкой нити согнутую линейку, то есть вблизи какой отметки нужно закрепить нить, чтобы длинный прямой участок линейки в положении равновесия был горизонтален?

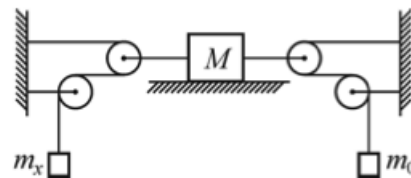
На отметке 24 см

Задача 27. (МОШ, 2016, 8) Однородная линейка подвешена к потолку на нити, привязанной к середине линейки. К линейке прикреплены груз и однородная цепочка так, как показано на левом рисунке. При этом линейка горизонтальна и находится в равновесии. Затем груз полностью погрузили в воду так, что он не касался дна и стенок стакана. Для того чтобы сохранить равновесие системы, пришлось переместить точку прикрепления к линейке одного из концов цепочки на  $1/4$  длины линейки — как показано на правом рисунке. Какова средняя плотность материала, из которого сделан груз?



2000 кг/м<sup>3</sup>

Задача 28. (МОШ, 2015, 8) В системе, изображённой на рисунке, все блоки невесомые, нити лёгкие и нерастяжимые, трения в осях блоков нет. Участки нитей, не лежащие на блоках, горизонтальны. Массы брусков, указанные на рисунке, известны. Модуль максимальной силы трения между бруском  $M$  и площадкой, на которой он лежит, равен  $F$ .

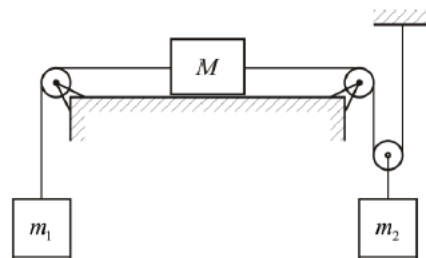


1) Чему может быть равна масса  $m_x$  левого бруска для того, чтобы система находилась в равновесии?

2) Чему равно отношение модулей скоростей брусков  $M$  и  $m_x$  в случае нарушения равновесия системы?

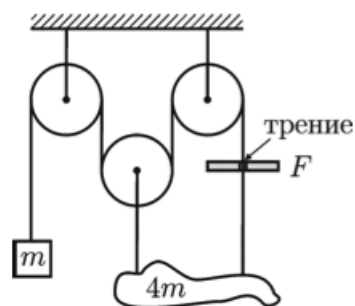
$2 : 1 \quad (2 : \frac{6g}{F} + 0m \geq xm \geq \frac{6g}{F} - 0m) \quad (1)$

Задача 29. (МОШ, 2016, 8) К бруску, лежащему на столе, с двух сторон с помощью систем из нитей и блоков прикреплены два груза (см. рисунок). Масса левого груза равна  $m_1 = 2$  кг и остаётся постоянной, а массу правого груза  $m_2$  можно изменять. Оказалось, что если масса правого груза больше 2 кг, но меньше 6 кг, то система находится в равновесии, в противном случае брусок начинает двигаться. Найдите коэффициент трения  $\mu$  между бруском и столом, если масса бруска 10 кг. Нити невесомы и нерастяжимы, блоки невесомы и трения в осях блоков нет.



Г'0

Задача 30. (МОШ, 2017, 8) Неоднородный груз массой  $4m$  подвешен при помощи системы блоков так, как показано на рисунке. Нити и блоки очень лёгкие, свободные участки нитей вертикальны, трения в осях блоков нет. К свободному концу нити, перекинутой через блоки, прикреплен противовес массой  $m$ . Участок этой же нити, находящийся между грузом и правым блоком, проходит через небольшое отверстие в неподвижной перегородке. При скольжении нити в отверстии возникает сила трения  $F = 10$  Н, действующая на нить со стороны стенок перегородки.

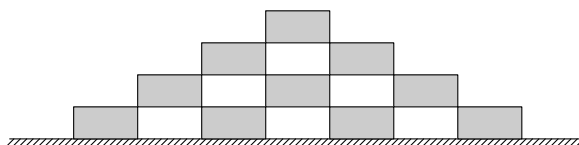


- 1) При каких значениях массы  $m$  противовеса система может оставаться в равновесии?
- 2) Где должен находиться центр масс неоднородного груза для того, чтобы равновесие было возможным?
- 3) Чему равен модуль силы трения  $F_1$ , и в какую сторону она направлена при  $m = m_1 = 0,7$  кг?

Модуль ускорения свободного падения можно считать равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

1)  $m < g/F > m$ ; 2) посередине между отверстиями; 3)  $F_1 = m_1 g = 7$  Н (вправо)

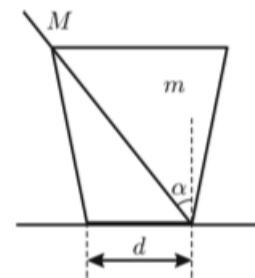
Задача 31. (МОШ, 2014, 8) На горизонтальной поверхности лежит стопка кирпичей, так, как показано на рисунке. Площадь соприкасающихся участков кирпичей очень мала (много меньше площадей всех граней кирпичей). Все кирпичи однородные и имеют одинаковый вес  $P = 25$  Н. Вычислите, с какой силой каждый кирпич из нижнего ряда давит на поверхность.



Для крайних кирпичей давит на поверхность с силами  $3P/2$ , для средних — с силами  $7P/2$

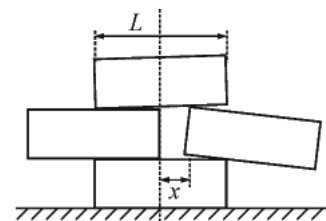


Задача 32. (МОШ, 2010, 8) На горизонтальном столе стоит пластиковый стаканчик для чая, имеющий форму усечённого конуса. Масса стаканчика  $m = 20$  г, диаметр его дна  $d = 5$  см. В стаканчик поместили тонкую однородную палочку массой  $M = 10$  г, расположив её так, как показано на рисунке. При этом палочка оказалась наклонённой под углом  $\alpha = 30^\circ$  к вертикали. При какой длине палочки  $L$  стаканчик не перевернётся?



$$T \geq \frac{m \sin \alpha}{(m+M) \cos \alpha} = 40 \text{ см}$$

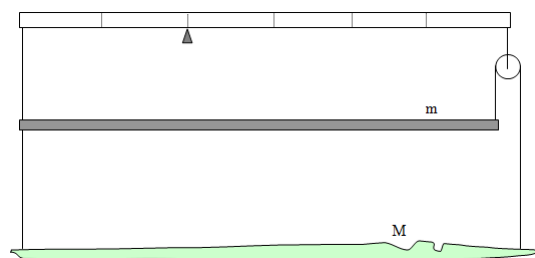
Задача 33. (МОШ, 2016, 8) Из четырёх одинаковых однородных ледяных кирпичиков длиной  $L$  каждый сложена симметричная стопка (см. рисунок). На какое максимальное расстояние  $x$  можно выдвинуть правый кирпичик, чтобы стопка не развалилась? Кирпичики очень гладкие.



$$T \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = x$$

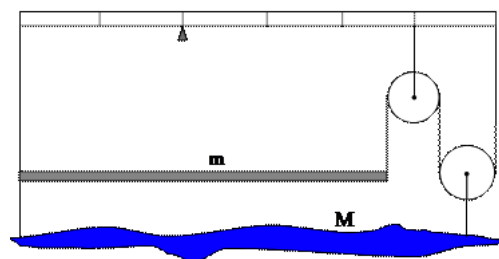
### 3 «Физтех»

Задача 34. («Физтех», 2014, 8) К концам невесомого рычага, установленного на опоре, через блок на нитях подвесили систему из однородного стержня массой  $m = 3$  кг и неоднородного груза  $M$ . Определите, чему равна масса  $M$ , если система находится в равновесии. Масса нитей и блока пренебречь. Опора делит невесомый рычаг в соотношении 1 : 2. Ответ дать в кг. Если ответ не целый, то округлить до десятых.



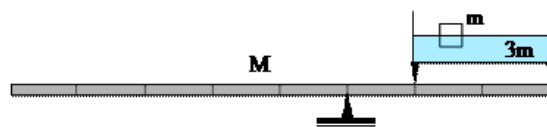
9

Задача 35. («Физтех», 2016, 8) Неоднородный груз подвесили к системе, состоящей из невесомого рычага, установленного на опоре, однородного стержня, имеющего массу 2 кг, двух невесомых блоков и нитей. Найдите массу груза  $M$ , если система оказалась в равновесии. Опора делит невесомый рычаг в соотношении 1 : 2. Ответ дать в кг и округлить до целых.



9

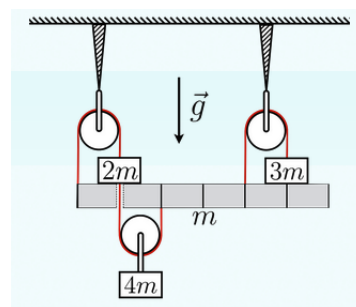
ЗАДАЧА 36. («Физтех», 2016, 8) На однородном рычаге уравновешена кювета с жидкостью и плавающим в ней бруском (см. рисунок) Масса бруска равна  $m = 1,0$  кг, масса кюветы вместе с жидкостью  $3m$ . Определите массу рычага  $M$ , если опора делит рычаг в отношении 3 : 5. Ответ выразите в кг, округлите до десятых.



0'8

ЗАДАЧА 37. (Олимпиада Физтех-лицея, 2015, 8) Тела, имеющие массы  $2m$ ,  $3m$  и  $4m$ , с помощью нитей, блоков и подставки с массой  $m$  находятся в равновесии. Тело массой  $2m$  действует на подставку с силой  $N_1 = 15$  Н. С какой силой действует на подставку тело массой  $3m$ ? Ответ выразить в ньютонах, округлив до целых.

$$N \approx 1N \frac{81}{8} = 10N$$

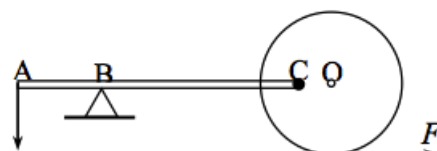


ЗАДАЧА 38. («Физтех», 2014, 8–9) Однородное бревно массой 90 кг висит в горизонтальном положении на двух верёвках, прикреплённых к концам бревна и к крюку на потолке. Угол между верёвками  $60^\circ$ . Найдите силу натяжения верёвок. Ответ выразить в ньютонах. Если ответ не целый, то округлить до сотых. Ускорение свободного падения  $10$  м/с<sup>2</sup>.

2'619

#### 4 «Росатом»

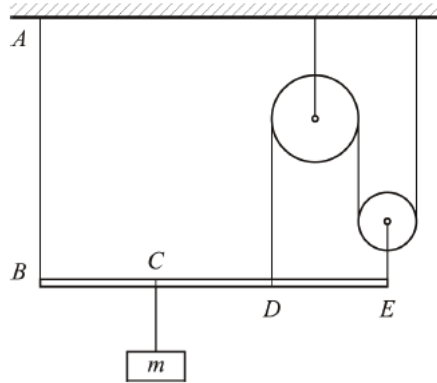
ЗАДАЧА 39. («Росатом», 2019, 7–8) На легкий блок намотана нить, которую тянут с силой  $F = 10$  Н. К точке блока  $C$  шарнирно прикреплен конец невесомого рычага, опирающегося в точке  $B$  на точечную опору (см. рисунок). Какой силой нужно действовать на второй конец рычага, чтобы вся конструкция находилась в равновесии?  $AB : BC : CO = 2 : 6 : 1$ . Радиус блока в три раза меньше полной длины рычага.



$$N \approx 10N = 10N$$

## 5 «Курчатов»

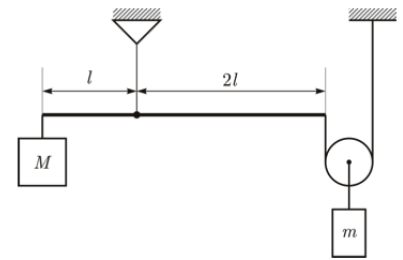
ЗАДАЧА 40. («Курчатов», 2016, 7–8) К лёгкому стержню  $BE$  подвешен груз массой  $m = 6$  кг (см. рисунок). Стержень удерживается системой идеальных блоков и нитей. Вся система находится в равновесии. Найдите силу натяжения нити  $AB$ . Точки  $C$  и  $D$  делят стержень на три равные части. Модуль ускорения свободного падения считайте равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



$$\boxed{H \text{ } \varrho' \text{ } \mathcal{L} \mathcal{E} = 6u \frac{g}{3} = \mathcal{L}}$$

ЗАДАЧА 41. («Курчатов», 2014, 8) Какова должна быть масса левого груза  $M$ , чтобы система из невесомого рычага и идеального подвижного блока, показанная на рисунке, находилась в равновесии? Масса правого груза  $m = 2$  кг.

$$\boxed{\text{кг } 2}$$



ЗАДАЧА 42. («Курчатов», 2018, 8) На рисунке приведена конструкция, состоящая из простых механизмов. Определите, чему должна быть равна масса груза  $m_2$ , для того чтобы система находилась в равновесии, если масса груза  $m_1 = 1$  кг.

$$\boxed{m_2 = 12 m_1 = 12 \text{ кг}}$$

