

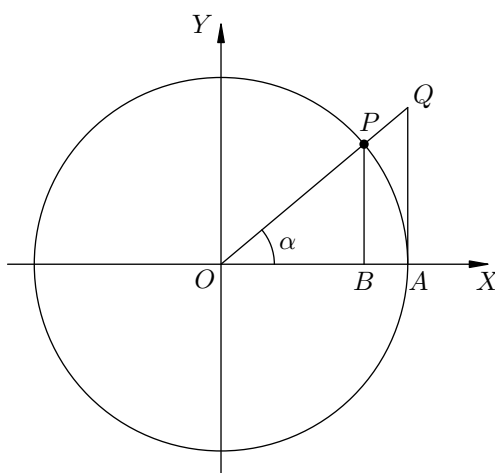
Преломление. Малые углы

В некоторых задачах оптики нас интересуют только *параксиальные* световые лучи, то есть лучи, которые образуют очень малые углы с некоторой выделенной осью (например, с осью оптической системы или с направлением луча зрения). Это связано с тем, что во многих случаях лишь параксиальные лучи формируют изображение рассматриваемого объекта.

Для малого угла α , выраженного в радианах, справедливы приближённые равенства

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha. \quad (1)$$

Чтобы понять, откуда они берутся, давайте посмотрим на тригонометрическую окружность. Пусть P — точка единичной окружности, отвечающая углу α (см. рисунок).



Согласно определению радианной меры угла, длина дуги окружности радиуса R , стягивающей центральный угол α , равна $R\alpha$. Поэтому длина дуги PA равна $1 \cdot \alpha = \alpha$. Кроме того, $PB = \sin \alpha$ и $QA = \operatorname{tg} \alpha$. Все эти три величины различны, но представьте себе, что будет при уменьшении угла α — полухорда PB , дуга PA и отрезок QA фактически сольются друг с другом! Таким образом, при малых α имеем

$$PB \approx PA \approx QA,$$

а это есть не что иное, как соотношения (1).

При малых углах α и β закон преломления $\sin \alpha / \sin \beta = n$ принимает вид $\alpha = n\beta$, что сильно упрощает вычисления.

ЗАДАЧА 1. На дне прозрачного водоёма глубиной H лежит монета. Человек, находящийся над водой, смотрит на монету так, что луч зрения перпендикулярен поверхности воды. На какой глубине h человек видит изображение монеты? Показатель преломления воды равен n .

$$\frac{u}{H} = \eta$$

ЗАДАЧА 2. Какова толщина d стеклянной плоскопараллельной пластинки, если точку на задней поверхности пластинки наблюдатель видит на расстоянии l от передней поверхности? Показатель преломления стекла равен n . Луч зрения перпендикулярен поверхности пластинки.

$$l^u = p$$

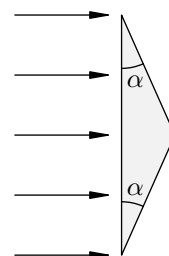
ЗАДАЧА 3. Стеклянная пластинка толщиной $d = 3$ мм имеет на верхней и нижней сторонах царапины. Чему равен показатель преломления стекла, если при наведении микроскопа с верхней царапины на нижнюю его тубус пришлось опустить на расстояние $l = 2$ мм? Углы отклонения от оси микроскопа лучей, попадающих в объектив, считайте малыми.

$$\varphi \approx \frac{l}{p} = u$$

ЗАДАЧА 4. На боковую грань прозрачной призмы с малым преломляющим углом φ падает луч света. Считая угол падения также малым, найдите угол отклонения луча, вышедшего из призмы (то есть угол δ между вышедшим лучом и первоначальным). Показатель преломления материала призмы равен n .

$$\delta \approx (n - 1)\varphi$$

ЗАДАЧА 5. Равнобедренная стеклянная призма с малыми углами преломления α помещена в параллельный пучок лучей, падающих нормально к её основанию (см. рисунок). Показатель преломления стекла $n = 1,57$, размер основания призмы $2a = 5$ см. Найдите угол преломления α , если в середине экрана на расстоянии $L = 100$ см от призмы образуется тёмная полоса шириной $2d = 1$ см.



$$\Delta x = vL$$

ЗАДАЧА 6. (МФТИ, 1999) В комнате на горизонтальной поверхности стола лежит плоское стеклянное зеркало толщиной $H = 7$ мм с показателем преломления стекла $n = 1,4$. Над зеркалом висит электрическая лампочка. Определите расстояние между двумя соседними изображениями светящейся нити лампочки, возникающими из-за многократных отражений от двух поверхностей зеркала.

$$x = \frac{u}{H^2} = 1 \text{ см}$$

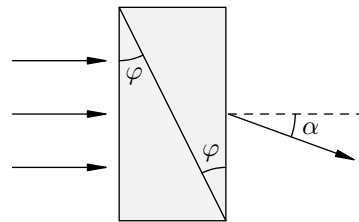
ЗАДАЧА 7. (МФТИ, 1999) Стакан с тонким дном, наполненный прозрачной жидкостью, ставится на монету, лежащую на столе. Если сверху через жидкость нормально к её поверхности рассматривать монету, то изображение монеты наблюдается на расстоянии $h = 2,6$ см от дна стакана. Определите показатель преломления жидкости, если толщина слоя жидкости в стакане $H = 8$ см.

$$u \approx \frac{H-h}{H} = u$$

ЗАДАЧА 8. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) Две несмешивающиеся жидкости налиты в стакан так, что высота верхнего слоя жидкости h_1 в два раза больше высоты нижнего слоя жидкости h_2 . Показатели преломления жидкостей — $n_1 = 1,5$ и $n_2 = 1,75$ соответственно. При взгляде «прямо сверху» видимое расстояние до дна сосуда от верхней границы жидкости равно $H = 8$ см. Найдите h_1 и h_2 .

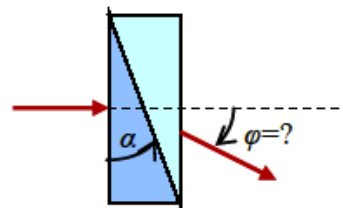
$$H = h_1 + h_2 = 8 \text{ см}$$

Задача 9. (МФТИ, 1975) Две одинаковые прямоугольные призмы с углом при вершине φ имеют несколько отличающиеся показатели преломления. Призмы приложены друг к другу своими гипотенузными гранями (см. рисунок). При освещении системы пучком света, падающим нормально на переднюю грань, оказалось, что выходящий пучок отклонился от первоначального направления распространения на угол α . Найти разность показателей преломления Δn . Углы φ и α считать достаточно малыми.



$$\frac{\delta}{v} = u \nabla$$

Задача 10. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Узкий пучок света падает нормально на поверхность плоскопараллельной пластины, склеенной из двух плотно прижатых клиньев с углом при вершине $\alpha = 4^\circ$. Разность показателей преломления материалов клиньев $\Delta n = n_1 - n_2 = 0,3$. Под каким углом к первоначальному направлению выйдет пучок из пластины? При расчётах учесть, что для малых углов $\text{tg } \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$ (в радианной мере).



$$\delta^2 \tau = u \nabla v = \delta$$

Задача 11. Человек смотрит на рыбку, находящуюся в диаметрально противоположной от него точке шарового аквариума радиусом R . На сколько смещено при этом изображение рыбки относительно самой рыбки? Показатель преломления воды $n = 4/3$.

$$R = \frac{n-2}{1-n} R \tau = x$$