

Подобие и размерность

ЗАДАЧА 1. (Всеросс., 2000, ОЭ, 9) Оцените (численно) максимальную скорость, которую может развить парашютист в затяжном прыжке (до раскрытия парашюта). Известно, что сила сопротивления воздуха F , действующая на парашютиста, является степенной функцией его скорости v , характерного размера a и плотности воздуха ρ : $F = \alpha \rho^m a^n v^k$, где α — безразмерный множитель порядка единицы, m, n, k — некоторые числа. Принять плотность воздуха $\rho = 1 \text{ кг/м}^3$, размер $a = 0,5 \text{ м}$.

$$\rho/n \text{ } 0\text{ } \sim \frac{d\alpha}{\beta u} \wedge \frac{v}{\Gamma} = a$$

ЗАДАЧА 2. (Всеросс., 2014, РЭ, 11) Как-то теоретик Баг, гуляя по берегу моря, увидел, как отдыхающий строил замок из песка (см. рисунок). Он решил узнать, какой максимальной высоты колонну можно построить из влажного песка. В одной из работ Леонарда Эйлера он обнаружил, что максимальная высота цилиндрической колонны, изготовленной из однородного и изотропного материала, может быть рассчитана по формуле



$$H = 1,25 \cdot E^\alpha R^\beta \rho^\gamma g^\lambda,$$

где α, β, γ и λ — некоторые числовые коэффициенты, R — радиус колонны, ρ — плотность материала, из которого она изготовлена, g — ускорение свободного падения, E — модуль Юнга. Баг рассчитал, что если колонну сделать из влажного песка, то при её радиусе $R_1 = 5 \text{ см}$ высота колонны окажется 1,0 м. Друг Бага, экспериментатор Глюк, решил собрать более «солидную» колонну. Он сделал радиус её основания $R_2 = 15 \text{ см}$. Колонна какой высоты получилась у Глюка?

Плотность влажного песка $\rho = 1500 \text{ кг/м}^3$, его модуль Юнга $E = 3,0 \cdot 10^6 \text{ Па}$, ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Примечание. Модуль Юнга — это коэффициент пропорциональности между давлением (или растяжением), действующим на плоскую поверхность исследуемого образца и его относительным сжатием (удлинением).

$$H \approx \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{1/3} H = \tau H$$

Задача 3. (МФО, 2014, 7, 10) Есть гипотеза, согласно которой размеры насекомых ограничены тем, что они потребляют **воздух** трахеальными трубками, выходящими на поверхность тела (то есть их **воздухозабор** пропорционален площади поверхности тела). Расход же кислорода, в свою очередь, пропорционален массе тела. Таким образом, можно прийти к выводу, что при увеличении насекомого в длину, высоту и ширину в одинаковое число раз можно добиться того, что оно начнет «задышаться» от недостатка кислорода.

Известно, что в карбоновом (каменноугольном) геологическом периоде размах крыльев стрекозы меганевры достигал 65 см. По предположениям учёных, это было возможно потому, что концентрация кислорода в атмосфере тогда составляла 35%, а не 21%, как сейчас (при той же плотности воздуха). Считая, что для времён карбона это был максимально возможный размер, оцените максимально возможный размах крыльев современной стрекозы. Сейчас стрекозы имеют примерно ту же плотность и пропорции тела, что и стрекоза периода карбона, и требуют на единицу массы не меньшее количество кислорода.

Примечание: ответ будет несколько превышать реальные размеры современных стрекоз из-за наличия других факторов, ограничивающих размер стрекозы (например, конкуренция с птицами).

МФО 6Э