

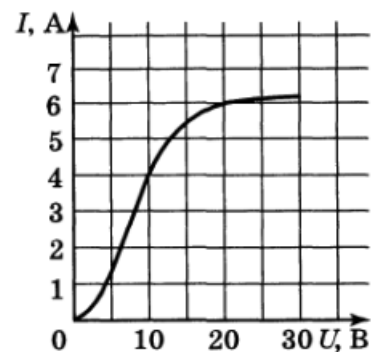
Нелинейные элементы

Вольт-амперная характеристика *нелинейного элемента* электрической цепи является нелинейной функцией.

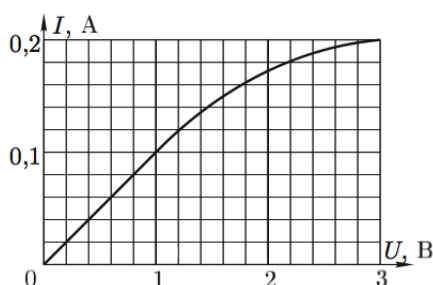
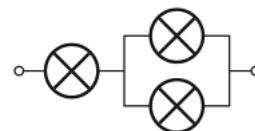
ЗАДАЧА 1. (Всеросс., 1993, финал, 9) Лампа, соединённая последовательно с резистором, сопротивление которого $R = 10$ Ом, подключена к сети. Зависимость силы тока от напряжения на лампе представлена на рисунке. При каком напряжении сети КПД схемы $\eta = 25\%$?

КПД схемы равен отношению мощности, потребляемой лампой, к мощности, потребляемой от сети.

20 В или 80 В



ЗАДАЧА 2. (Всеросс., 2008, ОЭ, 9) Экспериментатор Глюк собрал электрическую цепь из одинаковых нелинейных элементов (правый рисунок), вольт-амперная характеристика каждого из которых (зависимость силы тока через элемент от напряжения на нём) представлена на графике (нижний рисунок).



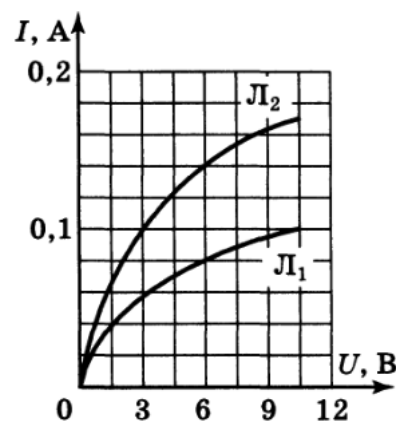
Определите, какой будет сила тока в цепи, если приложенное к ней напряжение U_0 равно:
а) 0,15 В; б) 3 В.

0,15 В (а) ; 0,084 А (б)

ЗАДАЧА 3. (Всеросс., 1998, финал, 9) Лампочки L_1 и L_2 , имеющие вольт-амперные характеристики, показанные на рисунке, соединили последовательно и подключили к источнику с напряжением $U = 12$ В.

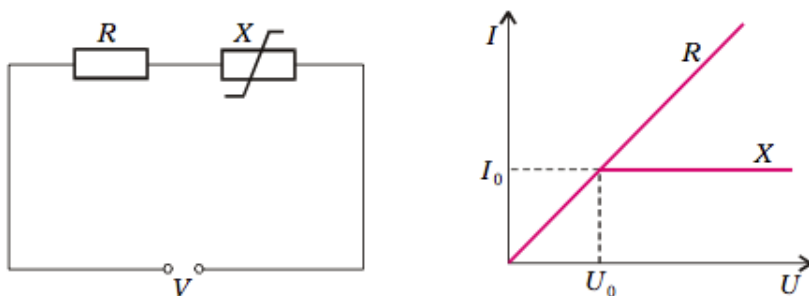
1) Найдите силу тока, текущего при этом через лампочку L_1 .

2) Чему равна сила тока, протекающая через лампочку L_1 , если лампочки L_1 и L_2 последовательно соединить с L_3 , имеющей такую же вольт-амперную характеристику, как и L_2 , и подключить эту «гирлянду» к источнику с напряжением $U = 12$ В?



0,094 А (1) ; 0,084 А (2)

ЗАДАЧА 4. (Всеросс., 2002, финал, 9) Электрическая цепь (рис. слева) состоит из резистора R и нелинейного элемента X , включённых последовательно. Вольт-амперные характеристики (ВАХ) элементов R и X известны (рис. справа). На участке $0 \leq U \leq U_0$ ВАХ обоих элементов совпадают. На вход цепи подается некоторое напряжение V .



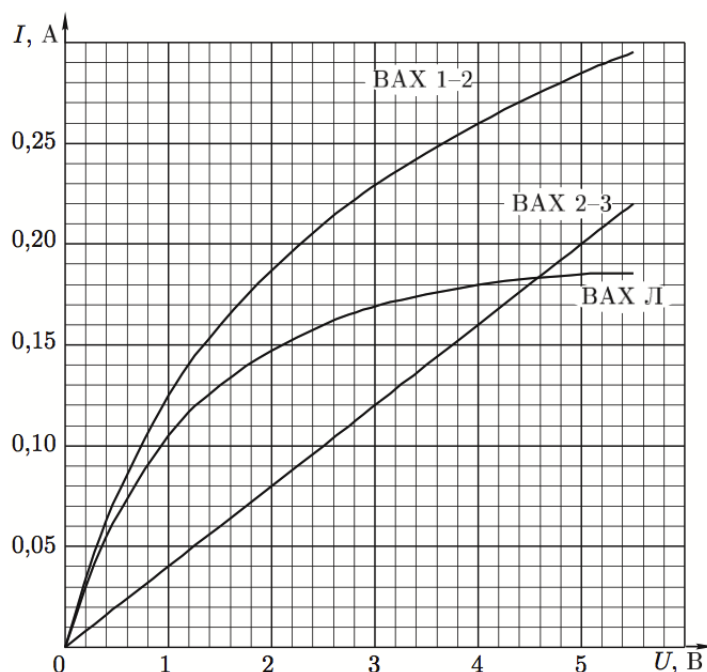
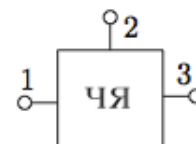
1) Определите, какая доля η_1 теплоты, выделяющейся в цепи, приходится на нелинейный элемент в случаях $V \leq 2U_0$ и $V = 4U_0$.

2) Включим последовательно в цепь ещё один элемент X . Изобразите ВАХ двух последовательно включённых нелинейных элементов. Определите, какая доля η_2 теплоты, выделяющейся в цепи, приходится на оба нелинейных элемента в случае $V = 4U_0$.

3) А теперь подключим второй элемент X параллельно первому. Изобразите ВАХ двух параллельно включённых нелинейных элементов. Определите, какая доля η_3 теплоты, выделяющейся в цепи, приходится на оба нелинейных элемента в случае $V = 4U_0$.

$$\frac{\eta}{I} \left(\varepsilon : \frac{V}{\varepsilon} \quad (\eta : \frac{V}{\varepsilon} \text{ и } \frac{\eta}{I} (I) \right)$$

ЗАДАЧА 5. (Всеросс., 2007, финал, 9) В «чёрном ящике» с тремя выводами (рис. справа) находятся два резистора и нелинейный элемент (лампочка от карманного фонарика), вольт-амперная характеристика которого изображена на рисунке ниже (график ВАХ Л). На том же рисунке изображены вольт-амперные характеристики «чёрного ящика», снятые между выводами 2–3 и 1–2.

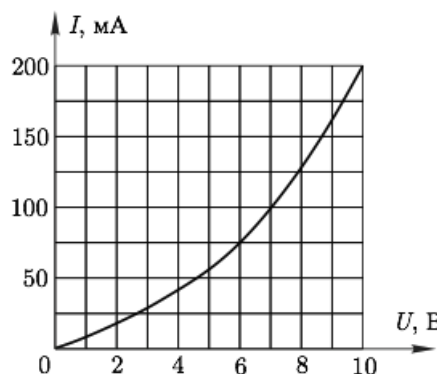
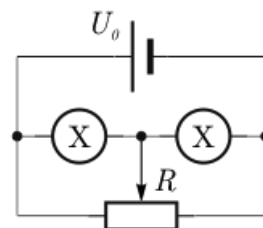


- 1) Определите сопротивления обоих резисторов.
- 2) Нарисуйте схему соединения элементов «чёрного ящика» и укажите на ней значения сопротивлений резисторов.
- 3) Графически постройте вольт-амперную характеристику «чёрного ящика» между выводами 1–3.
- 4) Предполагая, что лампочка рассчитана на напряжение $U_0 = 4,5$ В, определите, какое напряжение нужно создать между выводами 1 и 3, чтобы она горела полным накалом.

Примечание. Необходимые построения следует производить непосредственно на приведённом рисунке.

1) 25 Ом и 50 Ом ; 4) $\approx 11,3 \text{ В}$

ЗАДАЧА 6. (*Всеросс., 2017, финал, 9*) Электрическая цепь состоит из двух одинаковых нелинейных элементов X , потенциометра, сопротивление между неподвижными контактами которого $R = 100$ Ом, и идеальной батарейки с напряжением $U_0 = 10$ В (верхний рисунок). Вольт-амперная характеристика элемента X приведена на нижнем рисунке.



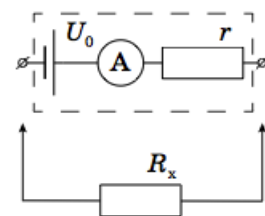
Определите:

- 1) Суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах, при крайних положениях движка потенциометра.
- 2) Суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах, при положении движка потенциометра в центре.
- 3) Минимальную суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах. При каких положениях движка потенциометра эта мощность достигается? Ответ обоснуйте.

4) Суммарную мощность, выделяющуюся на двух нелинейных элементах, при положении движка потенциометра, в котором сопротивление его левого плеча равно 25 Ом.

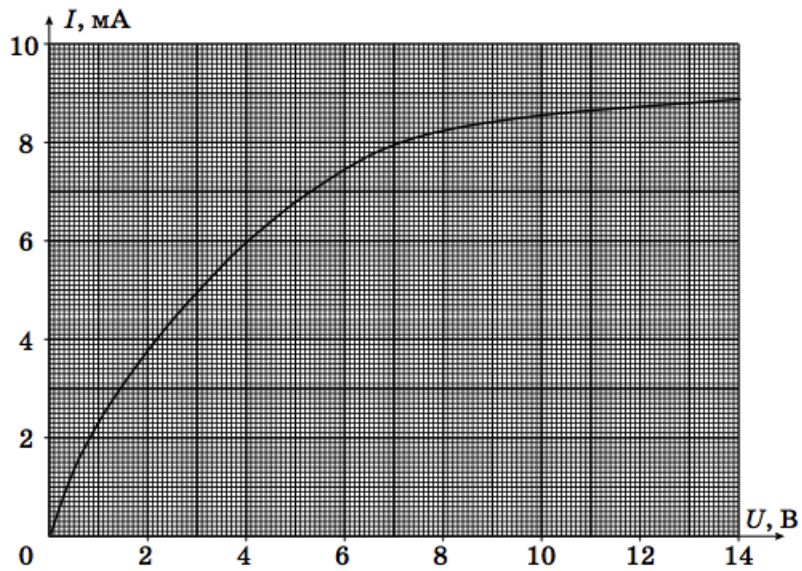
1) $P_1 = 2,00 \pm 0,02 \text{ Вт}$; 2) $P_2 = 0,60 \pm 0,03 \text{ Вт}$; 3) $P_{\text{min}} = P_2$; 4) $P = 0,7 \pm 0,1 \text{ Вт}$

ЗАДАЧА 7. (*Всеросс., 2018, финал, 9*) По упрощённой модели омметр состоит из соединённых последовательно идеального источника постоянного напряжения U_0 , резистора сопротивлением r и идеального амперметра (см. рисунок). При подключении к омметру резистора сопротивлением R_x показания амперметра автоматически пересчитываются так, что на цифровом табло прибора отображается значение сопротивления подключенного резистора.



Омметр при подключении к нелинейному элементу Z , вольт-амперная характеристика которого приведена ниже, показывает сопротивление $R_z = 800$ Ом. Если параллельно к элементу Z подключить резистор сопротивлением $R = 1,0$ кОм, омметр покажет значение $R_1 = 400$ Ом. Определите напряжение U_0 источника омметра и его сопротивление r . Найдите показания омметра R_2 при подключении к нему нелинейного элемента Z и резистора сопротивлением R , соединённых последовательно.

Примечание. Необходимые для решения построения выполните на выданном отдельном бланке и сдайте его вместе с работой.

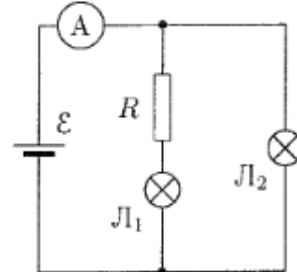
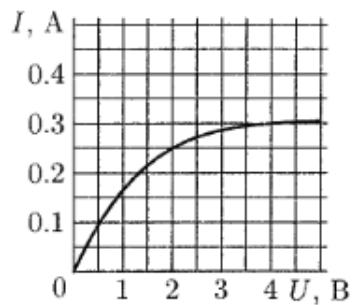


$$U_0 = 12 \text{ В}; r = 800 \text{ Ом}; R_2 = 1,6 \text{ кОм}$$

ЗАДАЧА 8. (МФТИ, 2003) Вольт-амперная характеристика лампочки накаливания приведена на рисунке слева. Две такие лампочки L_1 и L_2 включены в схему, изображённую на правом рисунке. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 4 \text{ В}$, сопротивление резистора $R = 8 \text{ Ом}$.

- 1) Чему равно напряжение на лампочке L_1 ?
- 2) Что покажет амперметр А?

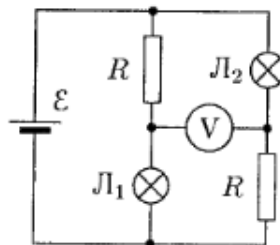
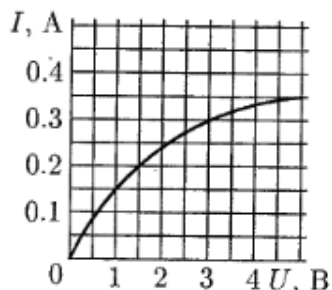
Внутренним сопротивлением батареи и амперметра пренебречь.



$$(1) U_{L1} = 2 \text{ В}; (2) I = 0,55 \text{ А}$$

ЗАДАЧА 9. (МФТИ, 2003) Вольт-амперная характеристика лампочки накаливания приведена на рисунке слева. Две такие лампочки L_1 и L_2 включены в схему, изображённую на правом рисунке. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 4,5$ В, сопротивление резисторов $R = 15$ Ом.

- 1) Чему равен ток через каждую лампочку?
 - 2) Что покажет идеальный вольтметр V?
- Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

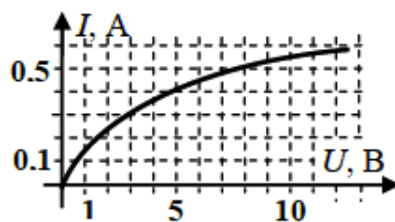
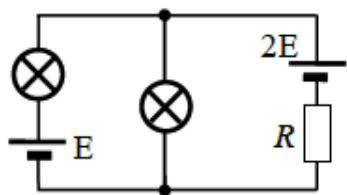


$$I_1 = I_2 = 0,2 \text{ A}; \quad U = 1,5 \text{ В}$$

ЗАДАЧА 10. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) При измерении сопротивления вольфрамовой нити лампочки в «холодном» режиме (при температуре около 0°C) оно оказалось равным $R_0 = 34$ Ом. В «рабочем» режиме лампочку подключают к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В и внутренним сопротивлением $r = 19$ Ом, и при этом она потребляет мощность $N = 25$ Вт. Найти температуру нити лампочки в «рабочем» режиме. Температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha \approx 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, изменением отношения длины нити к площади её сечения вследствие теплового расширения вольфрама можно пренебречь.

$$t = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right) = \frac{1}{4,1 \cdot 10^{-3}} \left(\sqrt{\frac{N}{\mathcal{E}^2} \left(\mathcal{E} - \frac{N}{\mathcal{E}} \right)} - 1 \right) \approx 2400^\circ\text{C}$$

ЗАДАЧА 11. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) В схеме, показанной на рисунке слева, одинаковые лампы являются нелинейными элементами — их вольтамперная характеристика показана на рисунке справа.



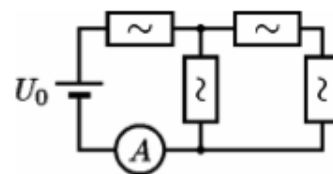
Сопротивление резистора $R = 28$ Ом, а $E = 6$ В. Найти суммарную мощность, потребляемую обеими лампами.

$$P \approx 2,14 \text{ Вт}$$

ЗАДАЧА 12. (Всеросс., 2012, РЭ, 10) Связь между напряжением U на лампе накаливания и силой тока, текущего через неё, даётся формулой $I \sim U^{3/5}$. Две лампы с номинальными напряжениями 220 В и номинальными мощностями $P_1 = 40$ Вт и $P_2 = 100$ Вт включили последовательно в сеть 220 В. Какое напряжение падает на лампе меньшей номинальной мощности?

$$U \approx 181 \text{ В}$$

ЗАДАЧА 13. (МОШ, 2007, 10) Электрическая цепь (см. рисунок) состоит из идеальной батареи с ЭДС U_0 , идеального амперметра и четырёх одинаковых нелинейных элементов, для каждого из которых, в отличие от закона Ома, связь силы тока I и напряжения U имеет вид $I = \alpha U^2$. Какой ток I_0 показывает амперметр?



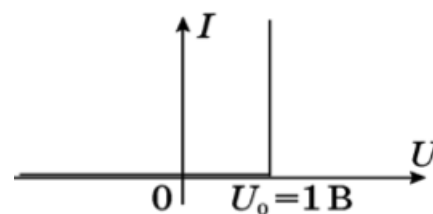
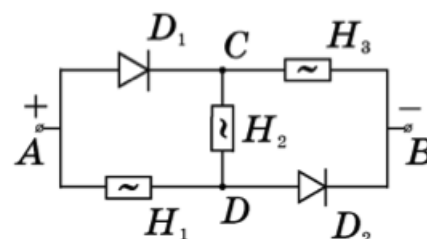
$$\boxed{I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{6\alpha}}}$$

ЗАДАЧА 14. (Всеросс., 2018, РЭ, 10) Электрическая цепь (верхний рисунок) состоит из двух одинаковых диодов (D_1 и D_2), трёх одинаковых нелинейных элементов (H_1 , H_2 и H_3) и батареи, поддерживающей постоянное напряжение $U_{AB} = 5,0$ В. Идеализированная вольт-амперная характеристика диода приведена на нижнем рисунке. Сила тока, протекающего через нелинейный элемент, может быть определена по формуле

$$I = kU^2,$$

где U — напряжение на элементе, $k = 0,1$ А/В² — постоянный коэффициент. Определите:

- 1) напряжения U_H на нелинейных элементах;
- 2) силы токов, протекающих через диоды.



$$\boxed{1) U_{H_1} = U_{H_2} = U_{H_3} = 1,5 \text{ В}; 2) I_{D_1} = I_{D_2} = 0,1 \text{ А}}$$

ЗАДАЧА 15. («Курчатов», 2014, 11) Газоразрядная лампа, вольт-амперная характеристика которой (зависимость тока, текущего через лампу, от напряжения на ней) задана уравнением $I = kU^2$, подключена последовательно с резистором сопротивлением R к источнику постоянного напряжения U . Если подключить неидеальный вольтметр к лампе, то он покажет напряжение V_1 , а если к резистору — V_2 . Найдите коэффициент k .

$$\boxed{k = \frac{U^2 - V_1^2}{V_1^2 R}}$$

ЗАДАЧА 16. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Лампы накаливания обычно являются нелинейными элементами электрических цепей — ток в них не пропорционален напряжению. Допустим, у нас есть набор ламп, для которых связь тока и напряжения дается формулой

$$I(U) = I_0 \sqrt{\frac{U}{U_0}},$$

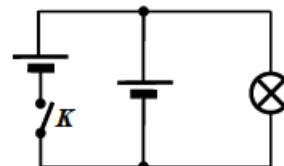
где значения I_0 и U_0 соответствуют номинальному режиму. Кроме того, мы можем использовать набор одинаковых батарей с ЭДС $\mathcal{E} = U_0$. Если подключить одну лампу к одной батарее, то на лампе будет выделяться мощность $P = \frac{27}{64} P_0$ (P_0 — номинальная мощность). Из какого минимального количества последовательно соединённых ламп надо составить гирлянду, чтобы при подключении её к некоторому количеству последовательно соединённых батарей все лампы гирлянды работали в точности в номинальном режиме? Сколько батарей нужно будет для этого использовать?

$$\boxed{5 \text{ ламп; } 12 \text{ батарей}}$$

ЗАДАЧА 17. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) В схеме, показанной на рисунке, оба источника одинаковы. Лампа является нелинейным элементом: её вольт-амперная характеристика (связь протекающего тока с напряжением) описывается выражением

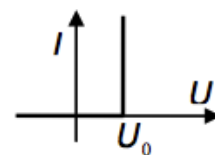
$$I(U) = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{\mathcal{E}U}{3}},$$

где r — внутреннее сопротивление, а \mathcal{E} — величина ЭДС каждого источника. Пока ключ K разомкнут, лампа потребляет мощность $P_1 = 6$ Вт. Какой станет потребляемая лампой мощность после замыкания ключа?



$$P_2 = P_1 \sqrt{2} \approx 8,5 \text{ Вт}$$

ЗАДАЧА 18. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) К источнику постоянной ЭДС подключают гирлянду из последовательно соединенных резистора и n одинаковых светодиодов, вольт-амперная характеристика которых показана на рисунке ($U_0 = 1$ В). Если включить в гирлянду $n_1 = 10$ светодиодов, то полная потребляемая ими мощность составит $P_1 = 175$ Вт, если включить $n_2 = 28$ светодиодов, то $P_2 = 238$ Вт. Определите «оптимальное» число светодиодов, при котором потребляемая мощность максимальна, а сила тока через каждый из светодиодов — минимальна (из возможных при этой мощности). Найти максимальную потребляемую мощность. Чему равна ЭДС источника?

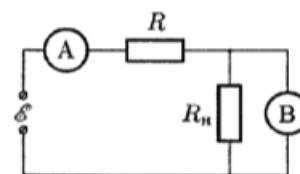


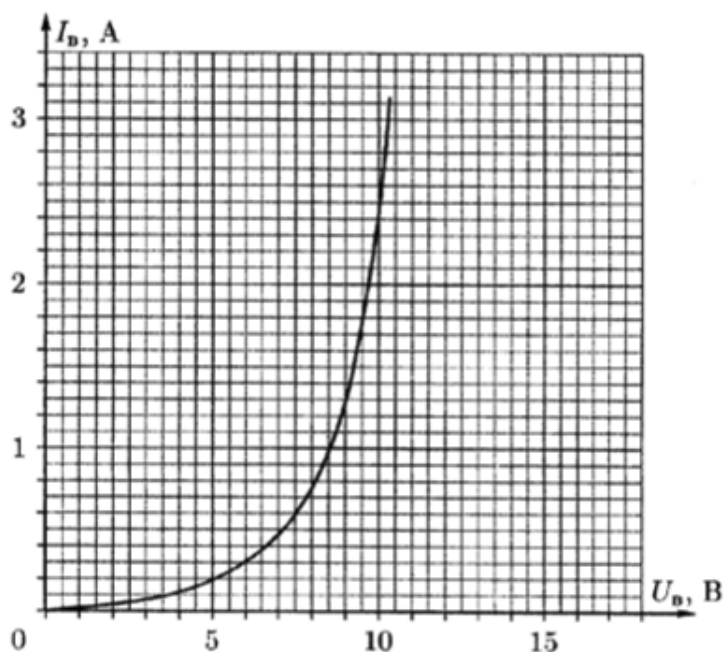
$$n_{\text{опт}} = 23; P_{\text{max}} = 253 \text{ Вт}; \mathcal{E} = 45 \text{ В}$$

ЗАДАЧА 19. (Всеросс., 2015, финал, 10) Некоторые элементы электрических цепей являются нелинейными, то есть сила тока, протекающего через них, не пропорциональна приложенному напряжению. Допустим, что у нас есть лампа накаливания, для которой сила тока $I_{\text{л}}$ пропорциональна $\sqrt{U_{\text{л}}}$, диод, у которого $I_{\text{д}}$ пропорциональна $U_{\text{д}}^2$, и источник постоянного напряжения. При этом и лампа, и диод обладают одинаковым свойством: если подключить любой из этих элементов к источнику в качестве нагрузки, то мощность тепловых потерь на нагрузке будет максимально возможной для данного источника. Если подключить к источнику лампу и диод, соединив их последовательно, то мощность потерь на такой нагрузке будет равна $P_1 = 7,2$ Вт. Какой будет мощность, если в качестве нагрузки к источнику присоединить лампу и диод, соединенные параллельно?

$$P_2 = P_1 = 7,2 \text{ Вт}$$

ЗАДАЧА 20. (Всеросс., 2010, финал, 10) В некоторых случаях для предохранения электроприборов от больших изменений входного напряжения применяются нелинейные полупроводниковые элементы — варисторы, включаемые параллельно прибору, роль которого на правом рисунке играет нагрузочное сопротивление $R_{\text{н}}$. Здесь $R_{\text{н}} = 10$ Ом, $R = 10$ Ом — балластное сопротивление, В — варистор, вольт-амперная характеристика которого изображена на нижнем рисунке, I — показания амперметра А, \mathcal{E} — входное напряжение. В номинальном режиме амперметр показывает силу тока $I = I_0 = 1,0$ А.



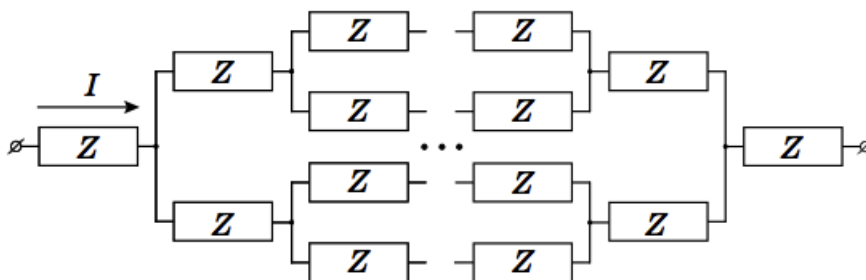


1) Определите входное напряжение \mathcal{E}_1 в номинальном режиме, а также напряжение U_{B1} на варисторе и силу тока I_{B1} , текущего через него.

2) Пусть входное напряжение возросло в два раза и стало равным $\mathcal{E}_2 = 2\mathcal{E}_1$. Определите, на сколько увеличилось напряжение на нагрузке и на сколько изменилась сила тока, протекающего через варистор.

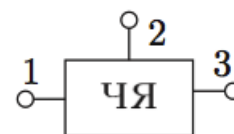
$$U_{B1} = 10 \text{ В}, I_{B1} = 3 \text{ А} \quad (1)$$

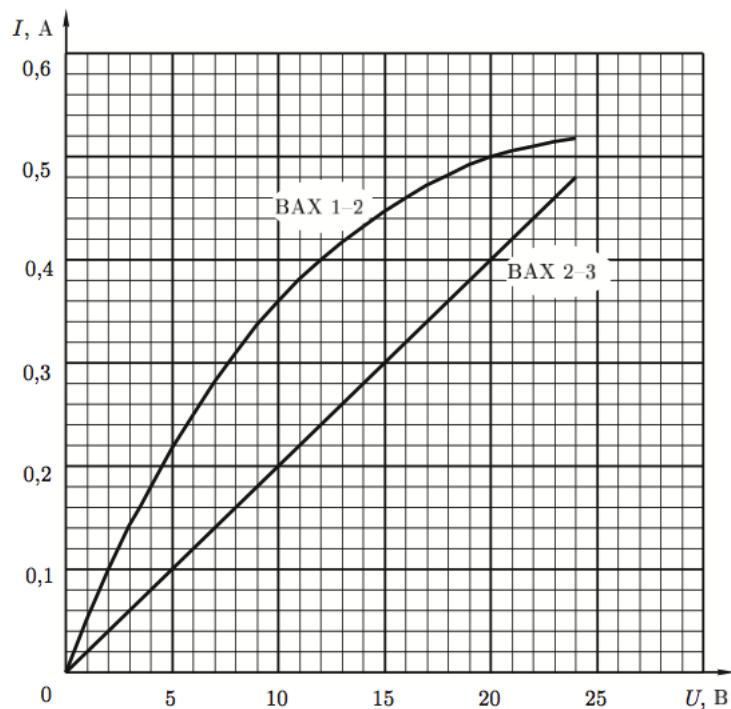
ЗАДАЧА 21. (Всеросс., 2018, финал, 10) Нелинейный элемент Z имеет вольт-амперную характеристику $I_Z = \alpha U_Z^2$, где $\alpha = 0,07 \text{ А/В}^2$. Получите формулу зависимости силы тока I от напряжения в цепи, составленной из бесконечного числа нелинейных элементов Z .



$$I = \frac{8}{\alpha(1-\alpha)^2} U^2$$

ЗАДАЧА 22. (Всеросс., 2007, финал, 10) Школьнику Васе Незнайкину на олимпиаде по физике предложили разгадать схему «чёрного ящика» с тремя выводами (рис.), в котором по условию задачи находились два резистора и нелинейный элемент (автомобильная лампочка, рассчитанная на номинальное напряжение $U_N = 12 \text{ В}$ и мощность $P_N = 6 \text{ Вт}$). Были приведены две вольт-амперные характеристики (рис. ниже), снятые между выводами 1–2 (ВАХ 1–2) и выводами 2 и 3 (ВАХ 2–3).





Нужно было:

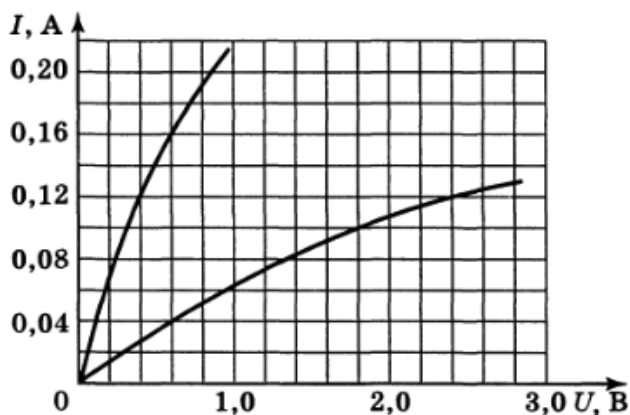
- 1) Проанализировать возможные схемы включения элементов «чёрного ящика», совместимые с условием задачи.
- 2) Выбрать одну из возможных схем и определить для этой схемы сопротивления резисторов.
- 3) Построить вольт-амперную характеристику нелинейного элемента.
- 4) Построить вольт-амперную характеристику, снятую между выводами 1 и 3 (BAX 1-3).

Помогите Васе!

Примечание. Необходимые построения следует выполнять непосредственно на рисунке.

Возможны две эквивалентных схемы, одна из которых — звезда с резисторами 16 и 34 Ом

Задача 23. (*Межреспубл., 1992, финал, 10*) В «чёрном ящике» находятся резистор, имеющий постоянное сопротивление, и нелинейный элемент, которые могут быть включены как последовательно, так и параллельно. Найдите сопротивление резистора. Какой нелинейный элемент может находиться внутри «чёрного ящика»? Вольт-амперные характеристики для последовательного и параллельного включений элементов представлены на рисунке.



R = 11 Ом; лампочка

Задача 24. (МОШ, 2018, 10) Светодиодная гирлянда состоит из n параллельно подключённых ветвей, в каждую из которых входит m последовательно соединённых светодиодов (см. схему на рисунке 1). При подключении такой гирлянды к источнику постоянного напряжения часто используют стабилизатор силы тока (изображён на схеме кружком со стрелкой, помещенным внутри прямоугольника). Вольтамперная характеристика стабилизатора представлена на рисунке 2. Вольтамперная характеристика одного светодиода показана на рисунке 3. Рабочий участок характеристики светодиода располагается между точками A и B : при меньших силах тока излучение светодиода незаметно для глаз, а при больших — светодиод может сгореть.

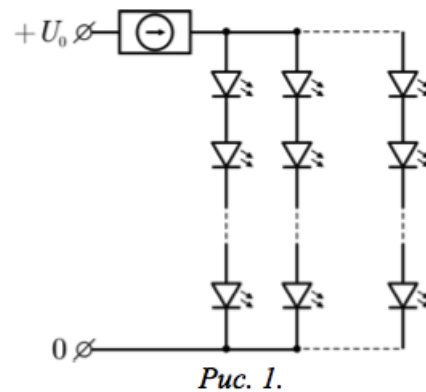


Рис. 1.

Пусть в нашем распоряжении есть много светодиодов для сборки гирлянды, блок питания большой мощности, обеспечивающий постоянное напряжение $U_0 = 14,9$ В, а также стабилизатор тока.

- 1) Определите диапазон рабочих токов и напряжений для гирлянды, состоящей из n ветвей, в каждую из которых включено m светодиодов. Чему может быть равно m , если гирлянда работает нормально?
- 2) Постройте вольтамперную характеристику для блока питания с последовательно присоединённым к нему стабилизатором.
- 3) Определите m и n для гирлянды, которая обеспечивает максимальную суммарную яркость свечения светодиодов. Считайте яркость пропорциональной электрической мощности, потребляемой светодиодами.
- 4) Найдите m и n для гирлянды с максимальным КПД.

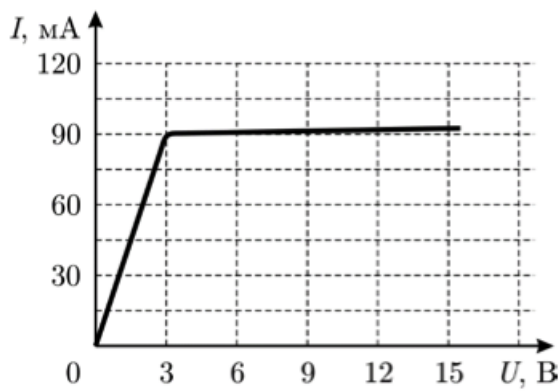


Рис. 2.

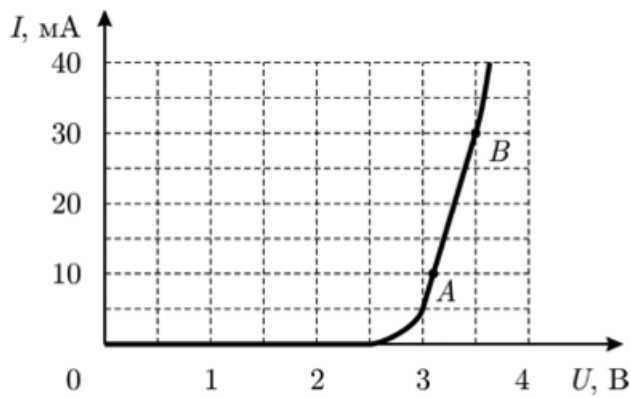
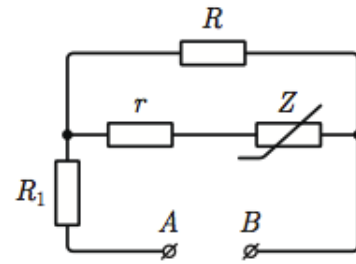
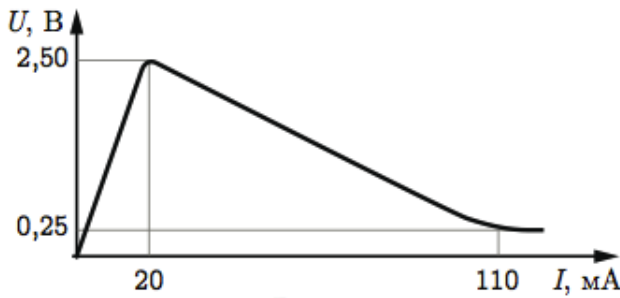


Рис. 3.

См. конспект

Задача 25. (МОШ, 2019, 10) Идеализированная зависимость напряжения от силы тока для нелинейного элемента Z схематично показана на рисунке слева. На основе этого элемента и резисторов R_1 и r по схеме, показанной на рисунке справа, может быть собрано устройство (стабилизатор напряжения), обеспечивающее неизменное напряжение U_0 на нагрузке (резистор $R = 300$ Ом), при различных значениях напряжения на входе (между точками A и B). При этом напряжение U_{AB} должно лежать в некотором диапазоне напряжений $U_1 - \Delta U \leq U_{AB} \leq U_1 + \Delta U$, в противном случае устройство перестает выполнять свою функцию стабилизации напряжения.

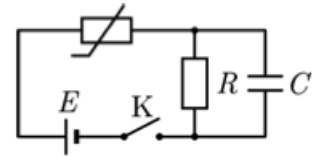


1. Чему равны напряжение U_0 и сопротивление резистора r в данной схеме?
2. Найдите сопротивление резистора R_1 , при котором полуширина диапазона входных напряжений ΔU будет максимально возможной при напряжении середины диапазона, равном $U_1 = 6$ В.

1) $r = 25$ Ом; 2) $R_1 = 40$ Ом

Задача 26. (МОШ, 2018, 11) Нелинейный элемент бареттер обладает свойством поддерживать постоянной силу тока через себя в некотором диапазоне рабочих напряжений от U_0 до U_1 (диапазон напряжений стабилизации). Обозначим эту постоянную силу тока через I_0 (ток стабилизации). При напряжениях, меньших U_0 , бареттер ведёт себя как резистор с сопротивлением $R_0 = U_0/I_0$. Бареттер на схеме цепи изображается как резистор, перечёркнутый отрезком ланной линии, похожим на клюшку.

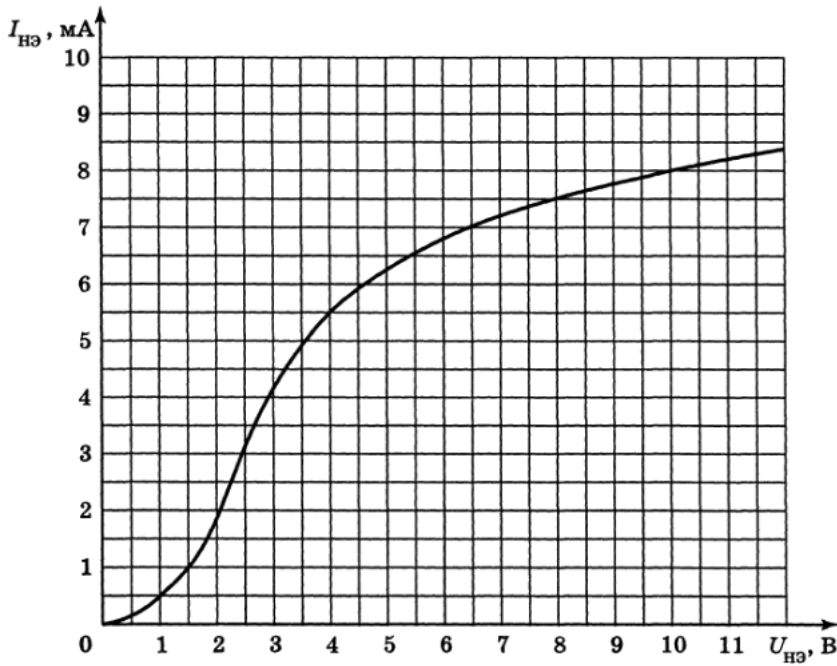
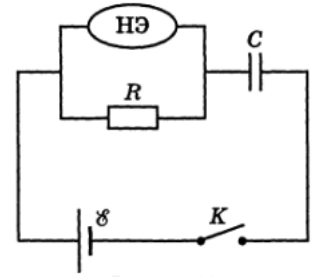
Используя бареттер, конденсатор ёмкостью $C = 10$ мкФ, идеальную батарейку с ЭДС $\mathcal{E} = 6$ В, ключ и резистор с сопротивлением R , собрали цепь, схема которой изображена на рисунке. Параметры бареттера: диапазон напряжений стабилизации от $U_0 = 2$ В до $U_1 = 6$ В, ток стабилизации $I_0 = 20$ мА. Проанализируйте процесс зарядки конденсатора после замыкания ключа при разных значениях сопротивления резистора и ответьте на следующие вопросы.



- 1) До какого напряжения зарядится конденсатор, если $R = 50$ Ом? А если $R = 500$ Ом?
- 2) Пусть $R = 200$ Ом. Чему равна сила тока, текущего через резистор в тот момент, когда скорость изменения энергии конденсатора в процессе зарядки максимальна?
- 3) Пусть $R = 5000$ Ом. За какое время конденсатор зарядится до половины максимального заряда?

1) 1 В; 5 В; 2) 10 мА; 3) 1,5 мс

ЗАДАЧА 27. (Всеросс., 2001, финал, 11) Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке справа, состоит из батареи с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В, резистора сопротивлением $R = 100$ Ом, конденсатора ёмкости $C = 8$ мкФ и нелинейного элемента НЭ, вольт-амперная характеристика которого изображена на нижнем рисунке. В некоторый момент времени ключ K замыкается. Полагая, что сила тока, протекающего через НЭ, в любой момент времени много меньше силы тока, протекающего через батарею, определите количество теплоты, выделившейся на НЭ.

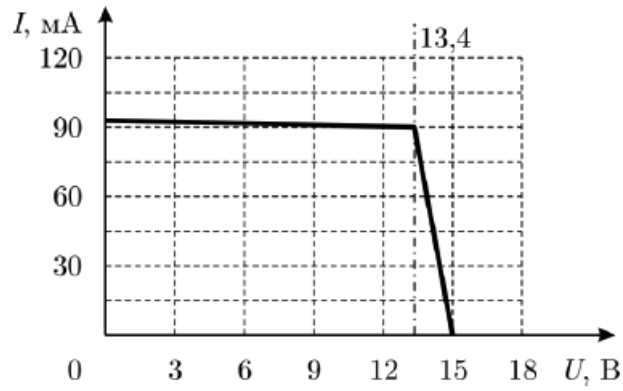


$$Q \approx 41,2 \text{ мкДж} \approx 0$$

Ответ к задаче 24

1) Диапазон рабочих токов: $10n \leq I \leq 30n$; диапазон рабочих напряжений: $3,1m \leq U \leq 3,5m$.
Для нормальной работы гирлянды нужно $1 \leq m \leq 4$.

2)



3) $m = n = 4$.

4) $m = 4, n = 2$.