

## Неконсервативные системы

Данный листок служит продолжением листка «[Консервативные системы](#)», в котором мы рассматривали системы тел, находящихся под действием только консервативных сил. Для таких систем справедлив закон сохранения механической энергии. Теперь мы переходим к рассмотрению *неконсервативных* систем, механическая энергия которых меняется со временем.

Сначала рассмотрим одно точечное тело, на которое действуют несколько сил. Разделим эти силы на две группы. К первой группе отнесём консервативные силы, отвечающие за потенциальную энергию тела. Ко второй группе отнесём остальные силы.

Проиллюстрируем эту ситуацию примером. Пусть пружинный маятник совершает вертикальные колебания в поле тяжести Земли; при этом на него действует сила сопротивления воздуха  $f$ , да ещё вдобавок мы воздействуем на него с некоторой силой  $F$  (постоянной или зависящей от времени — неважно). Первая группа сил — это сила тяжести и сила упругости пружины; им отвечает хорошо известная нам потенциальная энергия  $U = mgh + \frac{kx^2}{2}$ . Вторая группа — это  $f$  и  $F$ . Сила  $f$ , понятное дело, не консервативна, и делать ей в первой группе нечего. Сила  $F$  в принципе может оказаться консервативной, но при этом нам по каким-то причинам не хочется работать с её потенциальной энергией. Таким образом, механическая энергия маятника определяется выражением  $E = \frac{mv^2}{2} + mgh + \frac{kx^2}{2}$ , то есть кинетическая энергия плюс потенциальная энергия в поле сил первой группы.

Итак, пусть рассматриваемое тело (маятник из примера) переходит из положения 1 в положение 2. Силы первой группы совершают при этом работу  $A_{\text{конс}}$ , силы второй группы — работу  $A$ . Имеем:

$$A_{\text{конс}} = U_1 - U_2, \quad A_{\text{конс}} + A = K_2 - K_1,$$

откуда легко получаем

$$K_1 + U_1 + A = K_2 + U_2,$$

или

$$E_2 - E_1 = A. \quad (1)$$

Таким образом, *изменение механической энергии тела равно работе сил второй группы, то есть тех сил, которые не отвечают за потенциальную энергию тела.*

Аналогичный результат справедлив и для системы тел, находящейся под действием двух аналогичных групп сил. Его вывод принципиально не отличается от того, что вы прочитали сейчас для одного тела. Подробности смотрите в [Сивухине](#) (§ 25, п. 4).

Как видно из (1), знак изменения энергии системы совпадает со знаком работы  $A$ . Если  $A > 0$  (раскачиваем маятник), то энергия системы возрастает. Если же  $A < 0$  (маятник с трением), то энергия системы уменьшается со временем.

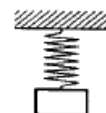
[Овчинкин] → 4.2, 4.19, 4.20, 4.46, 4.57, 4.66, 4.109, 4.121, 4.122.

ЗАДАЧА 1. (Всеросс., 2020, ШЭ, 10) На лёгкой пружине жёсткостью 500 Н/м, прикрепленной к потолку, подвешено тело массой 2 кг, которое первоначально покоится. На него начинает действовать постоянная сила, направленная вертикально вниз, равная  $F = 30$  Н. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

1. Чему равна первоначальная деформация пружины? Ответ укажите в см, округлив до целого числа.
2. Найдите работу силы  $F$  к тому моменту, когда груз опустится на 10 см. Ответ укажите в Дж, округлив до целого числа.
3. Найдите модуль скорости тела к тому моменту, когда оно опустится на 10 см. Ответ укажите в м/с, округлив до десятых долей.

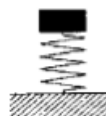
1) 4; 2) 3; 3) 0,7

ЗАДАЧА 2. (МОШ, 2017, 11) Груз, подвешенный на лёгкой пружине жёсткостью  $k = 200$  Н/м, растягивает её на  $x = 2$  см. Какую работу необходимо совершить вертикальной силе, приложенной к грузу, чтобы деформация пружины стала вдвое больше начальной?



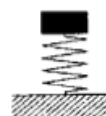
$A_1 = 0,04$  Дж,  $A_2 = 0,36$  Дж

ЗАДАЧА 3. (Всеросс., 2018, МЭ, 11) На лёгкой вертикально установленной пружине уравновешена гиря. Деформация пружины при этом составляет  $x = 6$  см. Чтобы увеличить деформацию пружины вдвое, медленно надавливая на груз в вертикальном направлении, надо совершить работу  $A = 1$  Дж. Найдите жёсткость пружины.



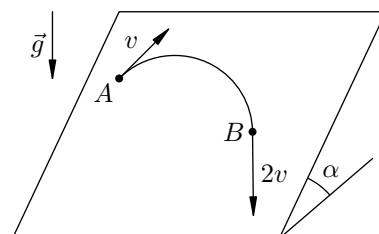
$k = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 556$  Н/м

ЗАДАЧА 4. (МОШ, 2018, 11) На лёгкой пружине уравновешена гиря. Деформация пружины при этом составляет  $x = 5$  см. Чтобы увеличить деформацию пружины вдвое, медленно приподнимая груз в вертикальном направлении, надо совершить работу  $A = 9$  Дж. Найдите жёсткость пружины.



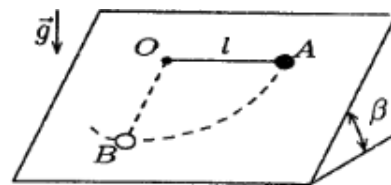
$k = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 008$  Н/м

ЗАДАЧА 5. (МФТИ, 2000) Широкая доска наклонена под углом  $\alpha$  к горизонту (см. рисунок). Небольшой шайбе, расположенной в точке  $A$  доски, сообщили скорость  $v$ , направленную вдоль поверхности доски. Через некоторое время шайба оказалась в точке  $B$ , сместившись по вертикали на  $H$  вниз и имея скорость  $2v$ . Какой путь прошла шайба между точками  $A$  и  $B$ ? Коэффициент трения скольжения шайбы о доску равен  $\mu$ .



$s = \frac{v \cos \theta \mu \zeta}{\zeta^{\alpha \xi} - H^{\beta \zeta}}$

ЗАДАЧА 6. (МФТИ, 2000) Небольшая шайба на нити длиной  $l$  может вращаться вокруг неподвижной оси  $O$ , скользя по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту  $\beta$  (см. рисунок). Шайбу поместили в точку  $A$  наклонной плоскости, соответствующую горизонтальному положению нити, и отпустили. Определить скорость шайбы в точке  $B$  — самой низкой точке траектории. Коэффициент трения скольжения шайбы о наклонную плоскость равен  $\mu$ . Нить всегда параллельна наклонной плоскости и не задевает её.

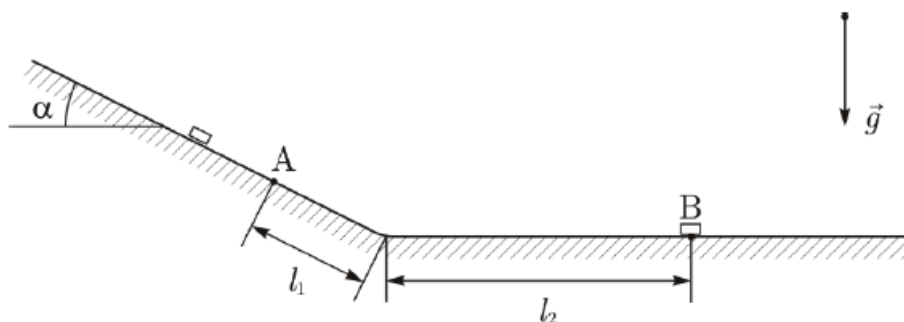


$$(g \cos \beta - \mu g \sin \beta) l \beta = v^2$$

ЗАДАЧА 7. (МФТИ, 1994) Мальчик съезжает на санках без начальной скорости с горки высотой  $H = 5$  м по кратчайшему пути и приобретает у подножия горки скорость  $v = 6$  м/с. Какую минимальную работу необходимо затратить, чтобы втащить санки массой  $m = 7$  кг на горку от её подножия, прикладывая силу вдоль плоской поверхности горки?

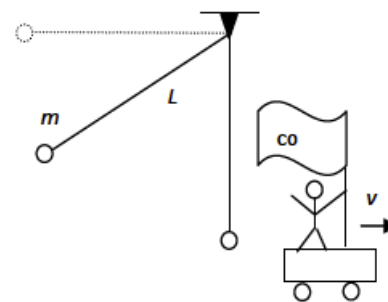
$$A_{\min} \approx \frac{mv^2}{2} - Hmg = 175 \text{ Дж}$$

ЗАДАЧА 8. (Всеросс., 2016, МЭ, 10) По наклонной плоскости, которая затем плавно переходит в горизонтальную, соскальзывает маленькая шайба, которая останавливается в точке  $B$  (см. рисунок). Найдите скорость шайбы в точке  $A$ . Коэффициент трения между обеими плоскостями и шайбой равен  $\mu$ , наклонная плоскость образует угол  $\alpha$  с горизонтом,  $\mu < \tan \alpha$ . Расстояния  $l_1$  и  $l_2$  известны,  $\mu l_2 > l_1 \sin \alpha$ . Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.



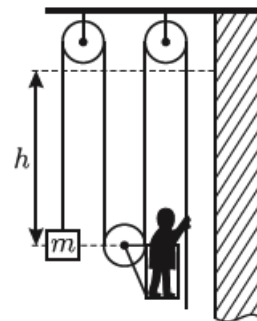
$$((v \cos \alpha - \mu g \sin \alpha) l_1 - \mu g l_2) \beta = v^2$$

ЗАДАЧА 9. (Всеросс., 2017, МЭ, 10) Небольшой шарик массой  $m$ , подвешенный на лёгкой нерастяжимой нити к потолку комнаты, отпустили без начальной скорости из состояния, в котором нить была горизонтальна. Найдите работу силы натяжения нити над шариком при его движении от верхнего положения до самого нижнего. Ответ дайте для системы отсчёта, связанной с комнатой, и для системы отсчёта, движущейся относительно комнаты горизонтально в плоскости рисунка с постоянной скоростью  $v$ . Длина нити  $L$ . Систему отсчёта, связанную с комнатой, можно считать инерциальной.



$$L \beta = v^2 - 2v \sin \alpha + g L \sin \alpha$$

Задача 10. (МОШ, 2008, 9) Человек поднялся вдоль верхнего участка стены здания на высоту  $h = 2$  м с помощью системы, состоящей из груза массой  $m = 25$  кг, нерастяжимой верёвки, трёх блоков и люльки, прикреплённой одному из блоков (см. рисунок). В начальный момент вся система вместе с человеком была неподвижна. Когда человек поднимался, конец верёвки в его руках двигался относительно стены со скоростью  $v = 1,2$  м/с. Сколько времени длился подъём? Какую работу совершил человек? Блоки, люлька и верёвка невесомы, трения нет, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



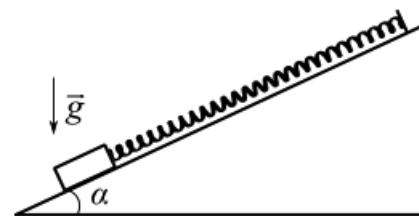
$$A_{чел} = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = 25 \cdot 10 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (1,2)^2 = 519 \text{ Дж}$$

Задача 11. (Всеросс., 1999, ОЭ, 11) На горизонтальном столе на расстоянии  $l_0 = 50$  см друг от друга находятся бруски массами  $m$  и  $12m$ , к которым прикреплена пружина (рис.). Вначале пружина не деформирована. Затем бруски раздвинули вдоль поверхности стола, увеличив расстояние между ними на 32 см, и отпустили без начальной скорости. На сколько и как изменится (увеличится или уменьшится) по сравнению с  $l_0$  расстояние между брусками после прекращения движения? Считать, что бруски и ось пружины находятся всегда на одной прямой. Известно, что подвешенный на этой пружине брусок массой  $m$  растягивает её на  $a = 30$  см. Коэффициент трения скольжения между брусками и столом  $\mu = 0,1$ .



Уменьшится на 2 см

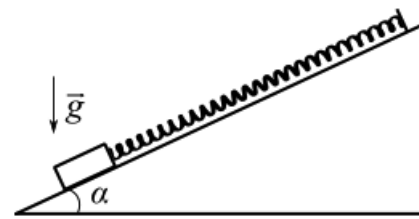
Задача 12. («Физтех», 2017, 9) На наклонённой под углом  $\alpha$  ( $\cos \alpha = 5/7$ ) к горизонту поверхности лежит брусок, прикреплённый к упругой невесомой и достаточно длинной пружине (см. рис.). Коэффициент трения бруска о поверхность  $\mu = 7/30$ . Брусок отклоняют вниз вдоль поверхности на расстояние  $A_0 = 32$  см от точки  $O$ , соответствующей положению равновесия бруска при отсутствии трения. Затем брусок отпускают, и начинаются затухающие колебания. Если брусок подвесить на этой пружине, то она удлинится на  $x_0 = 30$  см.



- 1) На каком расстоянии от точки  $O$  окажется брусок при первой остановке?
- 2) На каком расстоянии от точки  $O$  брусок остановится окончательно?

$$1) A_1 = A_0 \cos \alpha = 32 \cdot \frac{5}{7} = 22,86 \text{ см}; 2) A_2 = A_0 \cos \alpha = 22,86 \text{ см}$$

ЗАДАЧА 13. («Физтех», 2017, 10–11) На наклонённой под углом  $\alpha$  ( $\cos \alpha = 3/4$ ) к горизонту поверхности лежит брусок, прикрепленный к упругой невесомой и достаточно длинной пружине (см. рис.). Коэффициент трения бруска о поверхность  $\mu = 1/6$ . Брусок отклоняют вниз вдоль поверхности на расстояние  $A_0 = 35$  см от точки  $O$ , соответствующей положению равновесия бруска при отсутствии трения. Затем брусок отпускают, и начинаются затухающие колебания. Если брусок подвесить на этой пружине, то она удлинится на  $x_0 = 32$  см.



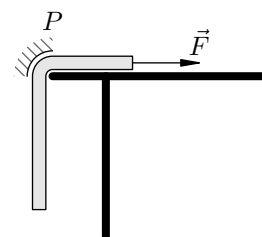
- 1) На каком расстоянии от точки  $O$  окажется брусок при первой остановке?
- 2) На каком расстоянии от точки  $O$  брусок остановится окончательно?
- 3) (11) Через какое время брусок остановится окончательно?

$$v \approx \sqrt{\frac{6}{5x}} \Lambda \approx 0.35 \text{ м/с} \quad (1)$$

ЗАДАЧА 14. («Росатом», 2011, 10) Гибкий канат длиной  $l$  и массой  $m$  удерживают на краю горизонтального стола, при этом со стола свешивается конец каната длиной  $l_1$ . Канат начинают втаскивать на стол, действуя на лежащий на столе конец постоянной горизонтальной силой  $F$  ( $F > mg$ ). Какой будет скорость каната, когда он полностью поднимется на стол? Трение отсутствует.

$$\frac{1}{2} l v^2 - \frac{m}{l} g l_1^2 = 0 \quad (1)$$

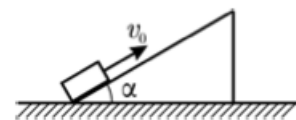
ЗАДАЧА 15. (МФТИ, 1998) Однородный гибкий канат длиной  $L = 1$  м и массой  $m = 1$  кг удерживают в покое за верхний конец так, что  $1/3$  каната находится на столе, а  $2/3$  свисает (см. рисунок). В некоторый момент канат перестают удерживать и начинают втаскивать на стол, прикладывая силу  $F = 8$  Н вдоль горизонтальной поверхности стола перпендикулярно кромке стола. Трением каната о стол и направляющий желоб  $P$  пренебречь.



- 1) Найти ускорение каната в начальный момент его движения.
- 2) Найти скорость каната в момент, когда он полностью окажется на столе.

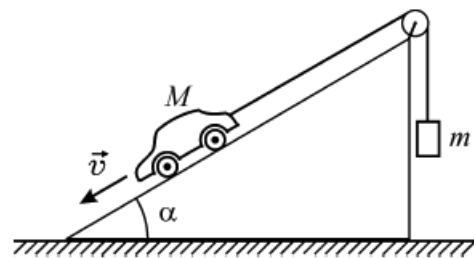
$$v \approx \sqrt{\left(\frac{8}{3} - \frac{m}{F}\right) g L} \approx 0.8 \text{ м/с} \quad (1)$$

ЗАДАЧА 16. (МОШ, 2018, 10) Клин массой  $M = 250$  г с углом  $\alpha = 30^\circ$  при основании покоится на гладкой горизонтальной плоскости. На клин положили брусок массой  $m = 100$  г и ударом сообщили ему некоторую скорость, направленную вверх вдоль наклонной поверхности клина. Найдите, какое количество теплоты  $Q$  выделилось в результате трения бруска о клин, если известно, что максимальная высота, на которую поднялся брусок от своего начального положения,  $h = 20$  см. Коэффициент трения бруска о наклонную поверхность клина  $\mu = 0,6$ . Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



$$Q \approx \frac{(v_0 \cos \alpha + v_0 \sin \alpha) v_0 \sin \alpha}{2} = 0 \quad (1)$$

Задача 17. (МОШ, 2016, 10) По наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом, едет с постоянной скоростью  $v = 1$  м/с игрушечный автомобиль, масса которого равна  $M = 300$  г. Автомобиль связан лёгкой нитью, перекинутой через невесомый блок, с грузом массой  $m = 200$  г, который движется вертикально. Автомобиль приводится в движение электромотором, который питается от батарейки. КПД электромотора при таком движении равен  $\eta = 60\%$ . Найдите количество теплоты, выделяющееся при протекании тока через обмотки электромотора за время  $t = 2,5$  с. Автомобиль движется без проскальзывания, трением в осях и сопротивлением воздуха можно пренебречь, ускорение свободного падения можно считать равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

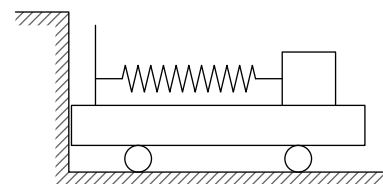


$$Q = (v \cos \alpha - u) \frac{u}{u-1} = 0$$

Задача 18. (МОШ, 2017, 11) Бруску массой  $m = 1$  кг, лежащему на горизонтальной поверхности и соединённому со стенкой пружиной жёсткостью  $k = 100$  Н/м, сообщают скорость  $v_0 = 1$  м/с в направлении стены. Изначально пружина была растянута на  $l = 10$  см. Коэффициент трения между поверхностью и бруском  $\mu = 0,2$ . Определите максимальную скорость бруска  $u$  в процессе последующего движения. Найдите максимальное сжатие пружины и ускорение бруска в начале движения.  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

$$v_0 \cos \alpha = v \sin \alpha \Rightarrow v = v_0 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = v_0 \cot \alpha = 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Задача 19. («Физтех», 2013) Тележка находится на горизонтальной поверхности стола. На шероховатой горизонтальной поверхности тележки находится брусок, прикрепленный к тележке лёгкой упругой пружиной (см. рисунок). Масса тележки в два раза больше массы бруска. Брусок отклоняют влево так, что пружина сжата на величину  $x$ , а тележка прижата к упору. Затем брусок отпускают.



1) Найдите деформацию пружины в момент отрыва тележки от упора.

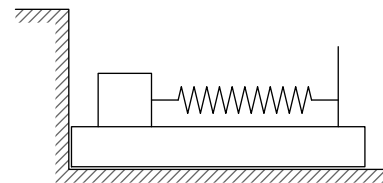
2) Найдите скорость бруска в момент отрыва тележки от упора.

3) Найдите скорость тележки после прекращения движения по ней бруска.

Известно следующее. Если брусок повесить на пружине, то деформация пружины равна  $3x$ . Если брусок тащить по неподвижной тележке с постоянной скоростью, прикладывая горизонтальную силу к прикрепленной к бруску пружине, то деформация пружины равна  $3x/4$ . Массой колёс тележки и трением в их осях пренебречь.

$$\frac{9x}{4} = \frac{x}{4} = x \quad \left( \frac{3x}{4} = x \Rightarrow \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow x = 0 \right)$$

ЗАДАЧА 20. («Физтех», 2013) Доска находится на шероховатой горизонтальной поверхности стола. На гладкой верхней горизонтальной поверхности доски находится брусок, прикрепленный к доске лёгкой упругой пружиной (см. рисунок). Брусок отклоняют влево так, что пружина растянута на величину  $x$ , а доска прижата к упору. Затем брусок отпускают.



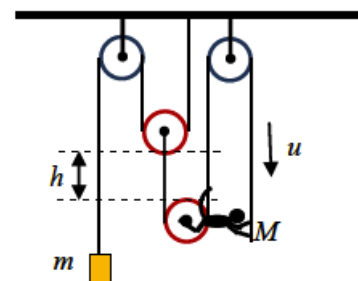
1) Найдите деформацию пружины в момент отрыва доски от упора.

2) Найдите скорость бруска в момент отрыва доски от упора.

Известно следующее. Если брусок подвесить на пружине, то деформация пружины равна  $x/5$ . Если брусок с доской двигать по столу с постоянной скоростью, прикладывая горизонтальную силу к бруску, то деформация сжатой пружины равна  $2x/3$ . Все деформации пружины меньше длины пружины в ненапряжённом состоянии.

$$\frac{x}{5} = a \left( \frac{x}{3} = \frac{2x}{3} \right)$$

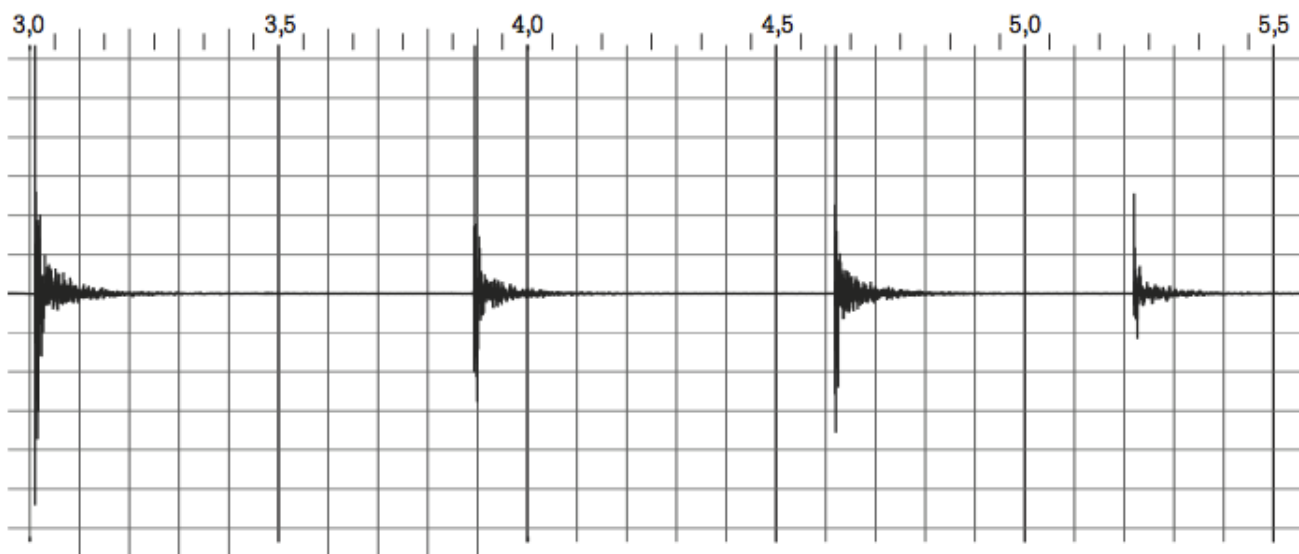
ЗАДАЧА 21. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 7–9) Обезьянка массы  $M = 21$  кг повисла, ухватившись за конец лёгкой нерастяжимой верёвки и за один из блоков системы, изображённой на рисунке. При этом система оказалась в равновесии. Затем обезьянка стала выбирать передними лапами верёвку так, что конец верёвки опускался вниз со скоростью  $u = 1$  м/с. Так было до тех пор, пока подвижный блок, за который задними лапами держалась обезьянка, не столкнулся с расположенным над ним подвижным блоком. В момент начала подъёма расстояние между этими блоками по вертикали было равно  $h = 3$  м. Чему равна масса груза  $m$ ? Найти время подъёма. Какую работу совершила обезьянка за всё время, прошедшее с момента, когда она ещё покоилась, до момента столкновения блоков? Все блоки очень лёгкие, верёвка по ним не скользит. Трения в осях блоков нет.



$$m = M/6 = 3.5 \text{ кг}; A = \frac{Mgh}{2} = 1.5 \text{ Дж}; t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 0.78 \text{ с}$$

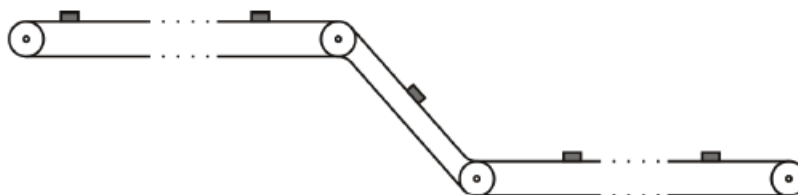
Задача 22. (МОШ, 2019, 9) На рисунке вы видите фрагмент амплитудно-временной характеристики звука ударов футбольного мяча о пол, записанного с помощью микрофона и программы Audacity при достаточно большой частоте дискретизации. Цифры над делениями горизонтальной шкалы — время в секундах. Мяч был отпущен без начальной скорости с некоторой высоты. Первый пик соответствует первому столкновению мяча с полом. Определите приблизительно:

1. с какой высоты был отпущен мяч;
2. сколько времени мяч находится в воздухе между пятым и шестым ударами;
3. сколько всего времени прыгал мяч.



1)  $1,4 \pm 0,2$  м; 2)  $0,41 \pm 0,06$  с; 3)  $5,6 \pm 0,8$  с

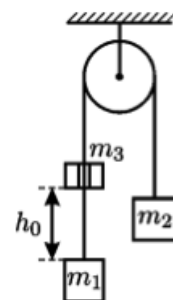
Задача 23. («Курчатов», 2016, 9) На ленте длинного транспортёра, имеющего два горизонтальных участка и один наклонный, движутся с постоянной скоростью одинаковые грузы массой  $M$ . Грузы расположены вдоль ленты на одинаковых расстояниях друг от друга и не скользят по ней. Лента приводится в движение мотором постоянной мощности. С нижнего горизонтального участка транспортера на верхний поднимается  $N$  грузов в минуту. После того как к каждому грузу привязали воздушный шар массой  $m$  и объёмом  $V$ , транспортёр стал поднимать  $n$  грузов в минуту. Найдите величину  $n$ . Мощность мотора после привязывания шаров осталась прежней, плотность воздуха равна  $\rho$  ( $\frac{m}{V} < \rho < \frac{M}{V}$ ). Потерями механической энергии в системе можно пренебречь.



$$N \frac{\Delta^d - u + N}{N} = u$$

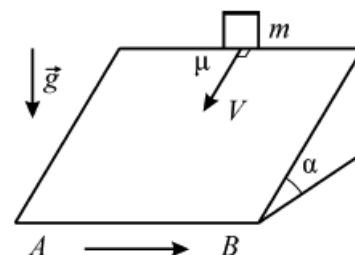


Задача 24. (МОШ, 2007, 11) На длинной нити, перекинутой через блок, висят грузы массами  $m_1$  и  $m_2$ . На высоте  $h_0$  над более лёгким грузом держат шайбу из пластилина массой  $m_3$  (см. рисунок). Известно, что  $m_3 > m_2 - m_1 > 0$ . В некоторый момент грузы  $m_1$  и  $m_2$  приходят в движение без начальной скорости. Когда груз  $m_1$  доходит до шайбы, её отпускают без начальной скорости, и пластилиновая шайба прилипает к грузу  $m_1$ . На какую максимальную высоту  $h$  над начальным положением поднимется шайба? Трение и масса блока пренебрежимо малы. Нить невесомая и нерастяжимая, а её участки, не лежащие на блоке, вертикальны.



$$\frac{\xi u - \zeta(\xi u + \tau u)}{\tau u - \xi u} \circ y = y$$

Задача 25. (МОШ, 2017, 11) С наклонной поверхности клина с углом  $\alpha$  при основании, движущегося по горизонтальному столу с постоянной скоростью вдоль направления  $AB$ , сталкивают небольшой груз массой  $m$  так, что в начальный момент его скорость  $V$  относительно клина направлена перпендикулярно  $AB$  вдоль наклонной поверхности (см. рисунок). Коэффициент трения между поверхностью клина и грузом равен  $\mu$  ( $\mu > \text{tg } \alpha$ ). Чему будет равна работа силы трения, с которой клин действует на груз, к моменту, когда проскальзывание груза по поверхности клина прекратится? По какой траектории движется груз, пока проскальзывание ещё не прекратилось? Ответ на оба вопроса нужно дать относительно системы отсчета, связанной со столом. Влиянием воздуха можно пренебречь.

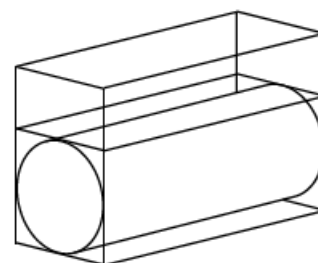


$$\text{эгодефен оп} : \frac{(v \bar{x}_1 - \tau) \zeta}{\zeta \Lambda u \pi} = V$$

Задача 26. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Со дна широкого водоема глубиной  $H = 10$  м поднимается деревянный прямоугольный параллелепипед высотой  $h = 0,8$  м с квадратным основанием со стороной  $a = 1$  м и плотностью  $\rho_1 = 800$  кг/м<sup>3</sup>. Какое количество теплоты выделится к тому моменту, когда параллелепипед и вода перестанут двигаться? Плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

$$(y(\tau d + d) - H d \zeta)(\tau d - d) \frac{d \zeta}{y b \zeta v} = \partial$$

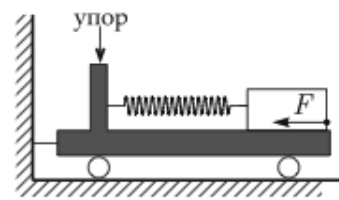
Задача 27. («Росатом», 2018, 11) Однородный цилиндр радиусом  $R$  и высотой  $h$  положили в кювету в форме прямоугольного параллелепипеда, длина которой на очень небольшую величину превосходит длину цилиндра  $h$ , а ширина — диаметр цилиндра, так, что цилиндр можно положить в кювету с очень небольшими зазорами между ним и стенками кюветы. Затем в кювету налили воду, которая только-только покрывает цилиндр (см. рисунок). Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вытащить цилиндр из воды? Плотность воды  $\rho$ , плотность материала цилиндра  $\rho R$ .



$$A = \frac{5}{2} \pi (4 - \pi) \rho g h R^3$$



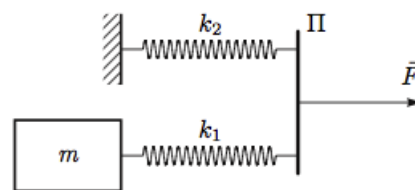
ЗАДАЧА 32. (Всеросс., 2015, финал, 9) Тележка соединена со стеной жёстким стержнем. К её упору прикреплена пружина, другой конец которой связан с бруском (см. рисунок). Вначале пружина не деформирована. На брусок в течение некоторого времени действует постоянная горизонтальная сила  $F$ , направленная вдоль тележки. После прекращения действия этой силы брусок ещё некоторое время смещается в сторону упора и возвращается, остановившись в исходной точке. Сила трения, действующая со стороны тележки на брусок, равна  $f$ . Трение в осях колес не учитывайте.



- 1) С какой силой  $N$  тележка давила на стержень в момент прекращения действия силы  $F$ ?
- 2) Найдите наибольшее значение силы  $N_{\max}$  давления тележки на стержень.

$$f\tau = \text{vsh} N \left( \tau : \left( \frac{d}{f v} + 1 \right) \right) f = N \quad (1)$$

ЗАДАЧА 33. (Всеросс., 2015, финал, 10) На гладкой горизонтальной поверхности расположена конструкция, показанная на рисунке (вид сверху). Один конец пружины жёсткости  $k_1$  прикреплен к грузу массы  $m$ , второй — к палочке П. У пружины жёсткости  $k_2$  один конец закреплен неподвижно, а второй прикреплен к той же палочке П. На палочку всё время действует сила  $F$ , остающаяся постоянной по величине и направлению (что бы ни случилось). Поначалу груз  $m$  удерживают неподвижно, а затем отпускают без толчка.

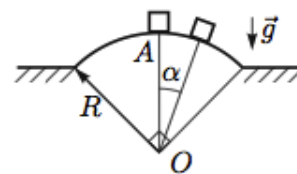


- 1) Найдите максимальную скорость груза.
- 2) Найдите удлинение первой пружины в момент, когда её длина будет минимальна.

Считайте, что масса пружин и палочки равна нулю, длины пружин в недеформированном состоянии одинаковы, растяжения пружин в момент отпускания груза тоже одинаковы, силу  $F$  прикладывают к палочке таким образом, что она движется поступательно (не поворачивается при движении), трение отсутствует.

$$\frac{z_2 + 1_2}{d} = 1x \left( z : \frac{(z_2 + 1_2) z_{2u}}{1_2} \right) \wedge d = a \quad (1)$$

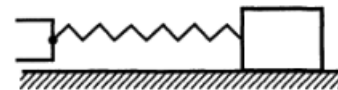
ЗАДАЧА 34. (Всеросс., 2016, финал, 10) Над горизонтальной поверхностью выступает сферическая горка, профиль которой представляет собой четверть окружности радиуса  $R$ . В верхнюю точку горки положили небольшую шайбу массой  $m$  и сообщили ей горизонтальную начальную скорость  $v_0$  (см. рисунок). Коэффициент трения между горкой и шайбой зависит от угла  $\alpha$  по закону  $\mu = \text{tg } \alpha$ .



- 1) Через какое время  $\tau$  тело достигнет горизонтальной поверхности при спуске без отрыва от горки?
- 2) Чему равна работа  $A_{\text{тр}}$  силы трения к этому моменту?
- 3) При каких величинах  $v_0$  шайба не оторвётся от поверхности горки?

$$\frac{z \wedge z}{R} \wedge \geq 0a \left( z : \frac{z}{z \wedge - z} \right) \text{vsh} m - \frac{z}{g} = \text{vsh} V \left( z : \frac{z \wedge 0a}{R} \right) = 1 \quad (1)$$

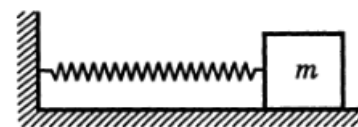
ЗАДАЧА 35. (Межреспублик., 1992, финал, 10) На гладком горизонтальном столе находится массивный куб с прикрепленной к нему лёгкой упругой пружиной, длина которой  $L = 1$  м (рис.). Если закрепить второй конец пружины таким образом, что пружина будет расположена горизонтально, и затем, оттянув в горизонтальном же направлении куб от положения равновесия, отпустить его, то возникнут слабозатухающие (вследствие трения о воздух) колебания куба. За 10 периодов амплитуда колебаний куба уменьшится в два раза. Для того чтобы поддержать амплитуду колебаний куба неизменной, закреплённый конец пружины начинают каждый раз, когда длина пружины становится минимальной, быстро сдвигать навстречу кубу на расстояние  $l = 1$  мм и быстро возвращать конец пружины в прежнее положение каждый раз, когда длина её максимальна. Найдите амплитуду установившихся колебаний. Потерями энергии в пружине можно пренебречь.



*Примечание.* При затухании колебаний их энергия за каждый период уменьшается в одно и то же число раз.

$$\ln \frac{E}{E_0} \approx -\left(\frac{\gamma \Delta t}{T} - 1\right) \ln 2 = x$$

ЗАДАЧА 36. (Всеросс., 1996, финал, 11) Груз, соединённый пружиной с вертикальной стенкой, совершает колебания, двигаясь по горизонтальной поверхности (рис.). Масса груза равна  $m$ , коэффициент трения между грузом и поверхностью равен  $\mu$ , жёсткость пружины равна  $k$ . В моменты времени, когда пружина максимально растянута, по грузу ударяют и сообщают ему некоторый импульс, так что он приобретает скорость  $v_0$  в направлении к стенке. Найдите скорость  $v_0$ , если колебания оказываются установившимися, а максимальное удлинение пружины равно  $l$ .



$$\left(\frac{\gamma}{\omega_{\text{вип}}} + 1\right) \ln 2 = \ln 2$$