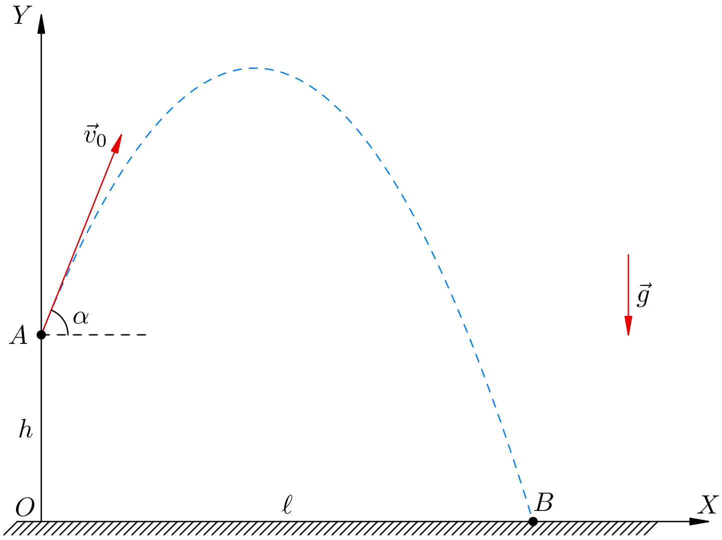
Максимизация дальности полета

В данной статье мы обсуждаем задачу о максимальной дальности полета тела, брошенного под углом к горизонту с некоторой высоты. Решаем ее тремя способами!

Задача. Хулиган Вася швыряет с балкона яблоки — с одной и той же начальной скоростью v_0 под всевозможными углами к горизонту. Балкон находится на высоте h над землей. На каком максимальном расстоянии от дома падают яблоки?

Проиллюстрируем данную ситуацию на рисунке. Вася находится в точке A; яблоко, брошенное под углом α к горизонту со скоростью v_0, приземляется в точке B. Выбор координатных осей очевиден. Надо максимизировать расстояние $\ell = OB$.



На первый взгляд может показаться, что ход решения тут совершенно понятен. В самом деле, мы же умеем решать задачу о максимизации дальности в случае броска с земли (при $h = 0$). Там мы получаем формулу для дальности:

$$\ell = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

и максимизируем это выражение по α (дальность будет максимальной при $\alpha = 45°$). Поэтому первое, что приходит в голову — будем действовать аналогично; именно, получим выражение для ℓ и максимизируем его по α.

Посмотрим, однако, что нас ждет на этом пути. Запишем зависимость координат от времени:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \qquad y = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Исключая время, получим уравнение траектории:

$$y = h + x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

В точке B падения яблока имеем $y = 0$:

$$h + x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = 0. \tag{1}$$

Искомая дальность является корнем квадратного уравнения (1); решая его, находим:

$$\ell = \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2v_0^2 h\cos^2\alpha}{g}}\,.$$

Получилось довольно громоздкое выражение. Можно, конечно, его несколько упростить, перейдя к двойному углу:

$$\ell = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\frac{v_0^4\sin^2 2\alpha}{4g^2} + \frac{v_0^2 h(1+\cos 2\alpha)}{g}}\,,$$

но все равно не возникает никакого желания заниматься максимизацией этого выражения по α. Значит, нужны другие подходы.

Способ 1 (*квадратное уравнение относительно* $\operatorname{tg}\alpha$). Выше мы нашли выражение для дальности при фиксированном угле α. Давайте действовать наоборот: фиксируем дальность ℓ и будем искать угол α, при котором эта дальность достигается. Для этого возвращаемся к уравнению (1), подставляем туда ℓ вместо x и используем тождество $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$:

$$h + \ell\operatorname{tg}\alpha - \frac{g\ell^2}{2v_0^2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\alpha\right) = 0.$$

Делаем замену $z = \operatorname{tg}\alpha$ и приходим к квадратному уравнению относительно z:

$$\frac{g\ell^2}{2v_0^2}\,z^2 - \ell z + \frac{g\ell^2}{2v_0^2} - h = 0. \tag{2}$$

Дискриминант

$$D = \ell^2 - \frac{4g\ell^2}{2v_0^2}\left(\frac{g\ell^2}{2v_0^2} - h\right) = \frac{g^2\ell^2}{v_0^4}\left(\frac{v_0^2\,(v_0^2 + 2gh)}{g^2} - \ell^2\right).$$

В зависимости от знака дискриминанта мы имеем три различных физических ситуации.

- При малых ℓ, то есть при $\ell^2 < \frac{v_0^2\left(v_0^2+2gh\right)}{g^2}$, дискриминант положителен и уравнение (2) имеет два различных корня. Это означает, что существует два различных угла α, при которых можно попасть яблоком в точку B. Иными словами, Вася может попасть яблоком в точку B двумя способами, по двум различным параболическим траекториям.

- При больших ℓ, то есть при $\ell^2 > \frac{v_0^2\left(v_0^2+2gh\right)}{g^2}$, дискриминант отрицателен и уравнение (2) не имеет корней. Это означает, что столь далекая точка B недостижима для Васи.

- Наконец, при особом значении ℓ дискриминант обращается в нуль. Уравнение (2) имеет в этом случае единственный корень, то есть в точку B ведет единственная траектория. Это соответствует границе достижимой области, а особое значение ℓ есть не что иное, как максимальная дальность полета:

$$\ell_{\max} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}. \tag{3}$$

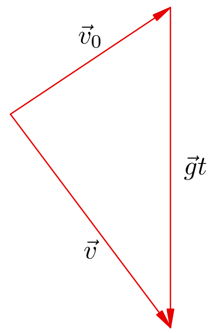
Ну а единственный корень уравнения (2) в этом случае равен

$$z_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{v_0^2}{gl_{\max}} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gh}}. \tag{4}$$

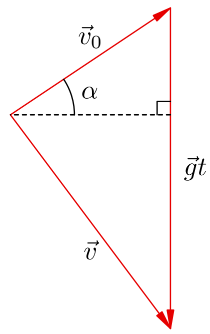
Таким образом, максимальная дальность (3) достигается при броске под углом к горизонту $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gh}}$.

Задача решена. Однако за кадром пока остался важнейший факт: *в случае максимальной дальности начальная и конечная скорости яблока перпендикулярны друг другу*. Попробуйте доказать это самостоятельно, оставаясь в рамках первого способа решения (это хорошее упражнение). Ну а мы переходим ко второму способу, и там данный факт установим практически сразу.

Способ 2 (*треугольник скоростей*). Начнем с известных фактов векторной баллистики. Соотношение $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ задает треугольник скоростей:



Оказывается, площадь S треугольника скоростей весьма просто связана с дальностью полета ℓ. В самом деле, проведем пунктирную высоту на вертикальную сторону треугольника:



Эта пунктирная высота горизонтальна и равна $v_0\cos\alpha$. Тогда

$$S = \frac{1}{2}\cdot gt\cdot v_0\cos\alpha = \frac{g}{2}\left(v_0\cos\alpha\cdot t\right) = \frac{g\ell}{2}.$$

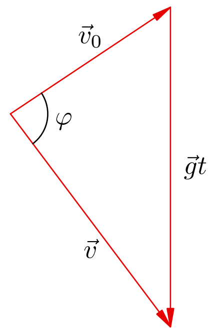
Отсюда

$$\ell = \frac{2S}{g}, \tag{5}$$

и мы видим, что ℓ будет максимальна в том случае, когда максимальна площадь треугольника скоростей. А чтобы разобраться с максимальной площадью, выразим S иначе:

$$S = \frac{1}{2}v_0 v\sin\varphi,$$

где φ — угол между начальной и конечной скоростями:



Конечную скорость проще всего найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgh,$$

откуда

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Как видим, скорость v есть величина постоянная, не зависящая от угла бросания α. Следовательно, площадь S (а вместе с ней и дальность) максимальна при $\varphi = 90^\circ$, то есть когда *конечная скорость перпендикулярна начальной*. Этот факт мы уже отмечали выше.

Итак, $S_{\max} = \frac{1}{2}v_0 v$, и формула (5) теперь дает

$$\ell_{\max} = \frac{2S_{\max}}{g} = \frac{v_0 v}{g} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

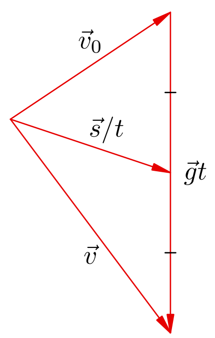
Формула (4) теперь очевидна: поскольку треугольник скоростей прямоугольный, угол α оказывается также углом между $\vec{v}$ и $\vec{g}t$, и тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}.$$

Красивый способ, не правда ли? Минимум вычислений!

Способ 3 (*медиана треугольника скоростей*). Здесь мы будем максимизировать $s = AB$, то есть модуль перемещения яблока. Это равносильно максимизации ℓ, так как из треугольника AOB имеем $\ell^2 = s^2 - h^2$.

Воспользуемся еще одним известным фактом: вектор медианы треугольника скоростей, проведенный к стороне $\vec{g}t$, равен $\vec{s}/t$, где $\vec{s}$ — перемещение за время t.



В самом деле, имеем $\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$, откуда

$$\frac{\vec{s}}{t} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{g}t}{2} = \frac{2\vec{v}_0 + \vec{g}t}{2} = \frac{\vec{v}_0 + (\vec{v}_0 + \vec{g}t)}{2} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2},$$

а это и означает, что $\vec{s}/t$ — медиана.

По формуле медианы

$$\left(\frac{s}{t}\right)^2 = \frac{v_0^2 + v^2}{2} - \frac{(gt)^2}{4} = \frac{v_0^2 + (v_0^2 + 2gh)}{2} - \frac{(gt)^2}{4} = v_0^2 + gh - \frac{g^2t^2}{4},$$

откуда

$$s^2 = (v_0^2 + gh)t^2 - \frac{g^2t^4}{4}$$

или

$$s^2 = (v_0^2 + gh)z - \frac{g^2z^2}{4},$$

где $z = t^2$. Максимизировать s^2 как квадратичную функцию z не составляет труда: максимум достигается в вершине параболы, то есть в точке

$$z_0 = \frac{v_0^2 + gh}{2 \cdot \frac{g^2}{4}} = \frac{2(v_0^2 + gh)}{g^2}.$$

Получаем:

$$s_{\max}^2 = s^2(z_0) = (v_0^2 + gh) \cdot \frac{2(v_0^2 + gh)}{g^2} - \frac{g^2}{4}\left(\frac{2(v_0^2 + gh)}{g^2}\right)^2 = \frac{(v_0^2 + gh)^2}{g^2} = \frac{v_0^4 + 2v_0^2gh}{g^2} + h^2,$$

откуда

$$\ell_{\max}^2 = s_{\max}^2 - h^2 = \frac{v_0^4 + 2v_0^2gh}{g^2} = \frac{v_0^2(v_0^2 + 2gh)}{g^2}$$

и, наконец,

$$\ell_{\max} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

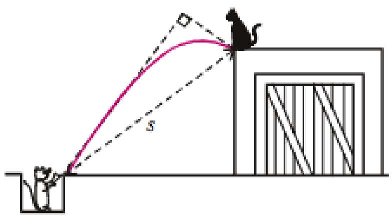
Ну вот и всё. Если есть желание поупражняться, то ниже приведено несколько задач для самостоятельного решения.

Задача 1. (*Всеросс., 2012, РЭ, 9*) Скорость камня v_0, брошенного под углом $\varphi = 60°$ к горизонту, уменьшилась вдвое за $\Delta t = 1$ с. Найдите модуль перемещения S, которое за это время совершил камень.

Примечание. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2.

$S = g\Delta t^2\sqrt{\frac{7}{12}} \approx 7{,}64$ м

Задача 2. (*Всеросс., 1999, ЗЭ, 9*) Кот Леопольд сидел у края крыши. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, упал у ног кота (см. рисунок) через время $\tau = 1$ с. На каком расстоянии s от мышей находился кот Леопольд, если известно, что векторы скоростей камня в момент выстрела и в момент падения были взаимно перпендикулярны?

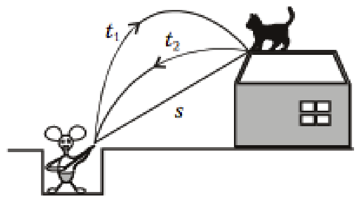


$s = \frac{1}{2}g\tau^2$

Задача 3. (*Всеросс., 2004, ЗЭ, 9*) При осаде древней крепости осаждённые вели стрельбу по наступающему противнику с помощью катапульт из-за крепостной стены высотой $h = 20{,}4$ м. Начальная скорость снарядов $v_0 = 25$ м/с. На каком максимальном расстоянии $\ell_{\max}$ от стены находились цели, которых могли достигать снаряды катапульт? Сравните это расстояние с максимальной дальностью $L_{\max}$ снаряда катапульты. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

$\ell_{\max} = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}} \approx 38$ м; $L_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \approx 64$ м

Задача 4. (*Всеросс., 2000, ЗЭ, 9*) Кот Леопольд стоял у края крыши сарая. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, через $t_1 = 1{,}2$ с упруго отразился от наклонного ската крыши сарая у самых лап кота и через $t_2 = 1{,}0$ с попал в лапу стрелявшего мышонка (см. рисунок). На каком расстоянии s от мышей находился кот Леопольд?



$s = \frac{1}{2} g t_1 t_2$