

## Кривизна траектории

В некоторых задачах приходится искать *радиус кривизны траектории*. Если траектория является окружностью, то ясно, что речь идёт о её радиусе. Но как быть, если траектория — не окружность, а, скажем, парабола?

Пусть движущееся тело проходит некоторую точку  $P$  своей траектории. В общем случае мы можем аппроксимировать (то есть приближённо заменить) маленький кусочек траектории в окрестности точки  $P$  маленькой дугой некоторой окружности. И чем меньше кусочек траектории, тем точнее он аппроксимируется дугой окружности. Так вот, радиус кривизны траектории в точке  $P$  — это радиус аппроксимирующей окружности, когда кусочек траектории становится исчезающе мал (стремится к нулю).

Скорость  $\vec{v}$  тела направлена по касательной к траектории в точке  $P$ . *Нормаль* в точке  $P$  — это прямая, перпендикулярная касательной в данной точке<sup>1</sup>. *Нормальное ускорение*  $\vec{a}_n$  — это составляющая полного ускорения  $\vec{a}$  вдоль нормали; понятно, что нормальное ускорение есть не что иное, как центростремительное ускорение тела при движении по аппроксимирующей окружности:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho},$$

где  $\rho$  — радиус этой окружности (то есть радиус кривизны траектории). Отсюда получаем формулу для нахождения радиуса кривизны:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{a \cos \theta},$$

где  $\theta$  — угол между ускорением  $\vec{a}$  и нормалью.

**ЗАДАЧА 1.** (*Всеросс., 1993, финал, 9*) Камень, брошенный под углом  $\alpha$  к горизонту со скоростью  $v_0$ , летит по параболической траектории. По той же траектории с постоянной скоростью  $v_0$  летит птица. Чему равно её ускорение в верхней точке траектории?

$$\frac{v \cos \alpha}{b} = v$$

**ЗАДАЧА 2.** (*Всеросс., 1993, финал, 10*) Камень, брошенный под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0$ , летит по некоторой траектории. Если по этой же траектории полетит комар с постоянной скоростью  $v_0$ , то каким будет его ускорение на высоте, равной половине высоты наибольшего подъёма камня? Сопротивление воздуха при движении камня можно не учитывать.

$$\frac{g/8 \cdot (v \cos \alpha)^2}{v \cos \alpha} = v$$

<sup>1</sup> Данное определение нормали годится в случае, когда траектория тела целиком расположена в одной плоскости. Только такие задачи вам и встретятся в школе.

Для пространственной кривой (например, винтовой линии) касательная определяется так же (как предельное положение секущей), а вот с нормалью дело обстоит сложнее.

ЗАДАЧА 3. (*Циклоида*) Колесо радиуса  $r$  катится без проскальзывания с постоянной скоростью  $v$ . Траектория, которую описывает фиксированная точка обода колеса в неподвижной системе отсчёта, называется *циклоидой* (см. гифку в Википедии).

1) Напишите параметрические уравнения циклоиды, то есть найдите координаты  $x(t)$  и  $y(t)$  данной точки обода как функции времени.

2) Найдите радиус кривизны циклоиды в её верхней точке.

$$x = vt - r\omega, \quad y = r(1 - \cos \omega) = r(1 - \cos \frac{v}{r}t)$$

[Овчинкин] → 1.3, 1.14, 1.20, 1.21.

Наряду с «физическим» вычислением радиуса кривизны траектории (через центростремительное ускорение) полезно знать и математические приёмы (применять которые в задачах по физике можно, разумеется, на физическом уровне строгости).

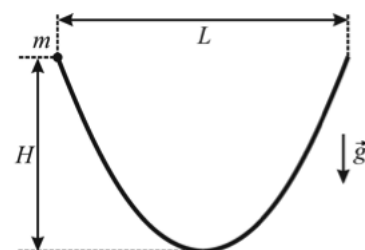
ЗАДАЧА 4. Найдите радиус  $r$  кривизны параболы  $y = ax^2$  ( $a > 0$ ) в её вершине, аппроксимировав параболу окружностью  $x^2 + (y - r)^2 = r^2$ .

$$\frac{v^2}{r} = a$$

ЗАДАЧА 5. Найдите радиусы кривизны эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  в точках его пересечения с осями координат, аппроксимировав нужный кусок эллипса параболой.

$$\frac{v}{r^2} = \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}$$

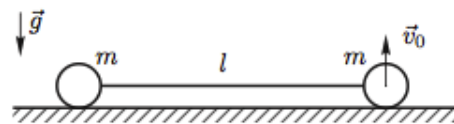
ЗАДАЧА 6. (*МОШ, 2015, 10*) Отрезок проволоки изогнут в виде симметричного участка параболы и расположен так, что ось её симметрии вертикальна. На этот отрезок надевают маленькую бусинку массой  $m$ , удерживая её у одного из краёв проволоки. Затем бусинку отпускают без начальной скорости, и она начинает скользить по проволоке под действием силы тяжести. Найдите модуль силы, с которой бусинка будет давить на проволоку, находясь в самой нижней точке своей траектории. Трение пренебрежимо мало. Размеры  $L$  и  $H$ , указанные на рисунке, известны.



$$\left( \frac{2L}{rH} + 1 \right) mg = N$$

[Овчинкин] → 2.45, 2.46.

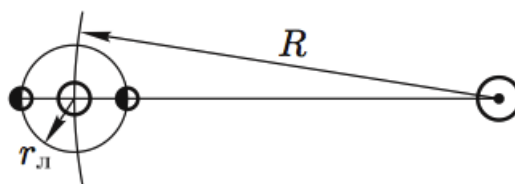
ЗАДАЧА 7. (Всеросс., 2013, финал, 10) Два одинаковых маленьких шарика массы  $m$  связаны невесомой и нерастяжимой нитью длины  $l$  и покоятся на гладкой горизонтальной плоскости (рис.). Правому шарiku сообщается вертикальная скорость  $v_0$ . Ускорение свободного падения  $g$ .



- 1) Найдите радиус кривизны траектории верхнего шарика в момент, когда нить вертикальна.
- 2) При каком значении начальной скорости  $v_0$  нижний шарик в этот момент перестанет давить на плоскость?

$$\boxed{r_{\text{кр}} = \frac{v_0^2}{g} \left( 1 + \frac{v_0^2}{g l} \right)}$$

ЗАДАЧА 8. (Всеросс., 2007, финал, 10) В астрономии за единицу длины принято среднее расстояние  $R$  от Земли до Солнца, называемое астрономической единицей (1 а. е.). В геоцентрической системе отсчёта, связанной с Землёй, Луна вращается по круговой орбите радиуса  $r_{\text{л}} = 2,57 \cdot 10^{-3}$  а. е. В гелиоцентрической системе траектория нашего естественного спутника выглядит гораздо более сложно, поскольку Луна вращается вокруг Земли, которая в свою очередь вращается вокруг Солнца (вращение происходит в одну сторону). Вычислите радиусы кривизны  $r_{\text{г}}$  и  $r_{\text{г}}$  траектории Луны в гелиоцентрической системе отсчёта во время полнолуния и новолуния. Ответ выразите в астрономических единицах. Отметьте качественно положение соответствующих центров кривизны ( $O_{\text{п}}$  и  $O_{\text{н}}$ ) на данном рисунке, на котором изображены Солнце и Земля. Отношение массы Земли к массе Солнца  $m_{\text{з}}/m_{\text{с}} = 3 \cdot 10^{-6}$ .



$$\boxed{r_{\text{г}} = \frac{R}{\left( 1 + \sqrt{\frac{g}{g_0}} \right)^2} \approx 0,74 \text{ а. е.}; r_{\text{г}} = \frac{R}{\left( 1 - \sqrt{\frac{g}{g_0}} \right)^2} \approx 1,69 \text{ а. е.}, \text{ где } \alpha = \frac{m_{\text{з}}}{m_{\text{с}}} = \beta, \beta = r_{\text{л}}/R}$$