

Импульс

Импульсом тела (принимаемого за материальную точку) называется вектор $\vec{p} = m\vec{v}$, где m — масса тела, \vec{v} — вектор его скорости. Оговорка про материальную точку принципиальна: если тело нельзя считать материальной точкой, то разные его части могут двигаться с разными скоростями, и тогда непонятно, что называть «скоростью» тела¹.

Второй закон Ньютона для нашей материальной точки

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

можно записать в виде $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$ (константу m мы внесли под знак производной) или

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (1)$$

Таким образом, скорость изменения вектора импульса тела равна силе, приложенной к телу.

Пусть два тела 1 и 2 образуют замкнутую систему, то есть взаимодействуют лишь друг с другом (а взаимодействием этих тел с другими телами можно пренебречь). Запишем для каждого из этих тел второй закон Ньютона (1)

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{T}_{12}, \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{T}_{21},$$

где \vec{T}_{12} — сила, приложенная к первому телу со стороны второго, а \vec{T}_{21} — сила, приложенная ко второму телу со стороны первого. По третьему закону Ньютона имеем $\vec{T}_{12} + \vec{T}_{21} = \vec{0}$, откуда

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{0}$$

или

$$\frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \vec{0}.$$

Последнее означает, что вектор $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ не меняется со временем:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}.$$

Мы получили *закон сохранения импульса* для двух материальных точек, образующих замкнутую систему.

Предположим теперь, что тела 1 и 2 не образуют замкнутую систему и взаимодействуют с другими (*внешними*) телами. Пусть \vec{F}_1 — результирующая сила, приложенная к первому телу со стороны внешних тел, а \vec{F}_2 — результирующая сила, приложенная ко второму телу со стороны внешних тел. Тогда

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{T}_{12}, \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{T}_{21}.$$

Складывая, получим

$$\frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (2)$$

¹Описанию движения тел, не являющихся материальными точками, посвящены листки «Системы материальных точек», «Центр масс» и «Движение с переменной массой».

Суммарный импульс $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$, как видим, теперь не сохраняется. Однако может случиться, что проекция суммы сил $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ на некоторую ось x равна нулю. В таком случае

$$\frac{dp_{1x}}{dt} + \frac{dp_{2x}}{dt} = 0,$$

то есть сохраняется проекция суммарного импульса тел на ось x .

Типичным примером последней ситуации является выстрел под углом к горизонту из пушки, расположенной на гладкой горизонтальной поверхности. Горизонтальные внешние силы, действующие на систему «снаряд+пушка», отсутствуют, поэтому сохраняется проекция суммарного импульса на горизонтальную ось. Однако *вектор* суммарного импульса снаряда и пушки *не сохраняется* — ведь после выстрела появилась вертикальная составляющая импульса снаряда, которой вначале не было. За счёт чего она появилась? За счёт того, что сила реакции опоры N , действующая на пушку, во время выстрела превышает силу тяжести, действующую на нашу систему (а почему превышает? — потому что снаряд, вылетая, «вдавливает» пушку в землю).

Соотношению (2) можно придать более компактную форму. Обозначим $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ суммарный импульс тел (который назовём *импульсом системы* тел 1 и 2) и $\vec{F}_{\text{внеш}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ — сумму внешних сил, приложенных к телам 1 и 2. Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}, \quad (3)$$

что по форме совпадает с уравнением (1) (но по сути, конечно же, от него отличается).

[Овчинкин] → 2.58, 4.18, 4.21, 4.22, 4.23, 4.24, 4.69.

ЗАДАЧА 1. («Физтех», 2014, 11) По гладкой горизонтальной поверхности движутся с перпендикулярными скоростями два маленьких шарика. Массы шариков $3m$ и $2m$, их скорости 1 м/с и 2 м/с соответственно. Шарик сталкиваются и прилипают друг к другу. Найдите скорость образовавшегося тела.

с/м I

ЗАДАЧА 2. (МФТИ, 2007) К неподвижной тележке, находящейся на горизонтальной поверхности, бегут мальчик массой m и девочка массой $0,8m$. Мальчик запрыгивает на тележку. Девочка нагоняет уже движущуюся тележку и тоже запрыгивает на неё. Скорость тележки увеличивается на 60%. Во сколько раз масса тележки больше суммарной массы мальчика и девочки? Горизонтальные составляющие скоростей мальчика и девочки относительно поверхности Земли перед попаданием на тележку одинаковы. Сопротивлением движению тележки пренебречь. Направления всех движений находятся в одной вертикальной плоскости.

в 3 раза

ЗАДАЧА 3. («Физтех», 2020, 9) Вниз по шероховатой наклонной плоскости равнозамедленно движется брусок. В тот момент, когда скорость бруска равна $V_1 = 1$ м/с, на брусок падает пластилиновый шарик и прилипает к нему, а брусок останавливается. Движение шарика до соударения — свободное падение с высоты $h = 0,8$ м с нулевой начальной скоростью.

1. Найдите скорость V_2 шарика перед соударением.
2. Найдите величину a ускорения бруска перед соударением.

Массы бруска и шарика одинаковы. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Быстрые процессы торможения бруска и деформации пластилина заканчиваются одновременно. В этих процессах действие сил тяжести считайте пренебрежимо малым.

$$v = \frac{1}{2} g h = 1,25 \text{ м/с} \quad a = \frac{V_1^2}{2h} = 0,625 \text{ м/с}^2$$

ЗАДАЧА 4. («Физтех», 2020, 10) На противоположных концах тележки массы M , находящейся на гладкой горизонтальной поверхности, стоят два ученика одинаковой массы m каждый. Длина тележки L . Вначале система неподвижна. Один ученик бросает мяч, а другой ловит. Масса мяча m_1 . В процессе полета горизонтальная составляющая скорости мяча относительно поверхности, на которой находится тележка, равна V_0 .

1. Найдите скорость V_1 тележки после броска.
2. Найдите продолжительность T полета мяча.
3. Найдите скорость V_2 тележки после того, как второй ученик поймает мяч.

Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

$$V_1 = \frac{m_1 V_0}{M + m} \quad T = \frac{L}{V_0} \quad V_2 = \frac{m_1 V_0}{M + m}$$

ЗАДАЧА 5. (Всеросс., 2019, МЭ, 11) Двое физиков сидят в круглых санках-ледянках, которые покоятся на гладкой горизонтальной поверхности замёрзшего озера, и держат в руках концы длинной невесомой нерастяжимой верёвки. Они начинают «выбирать» верёвку руками и таким образом едут навстречу друг другу. В некоторый момент сила натяжения выпрямленной (то есть не провисающей) между физиками верёвки становится равной нулю. После этого они продолжают «выбирать» верёвку так, что она движется относительно первого физика со скоростью $u_1 = 1$ м/с, а относительно второго — со скоростью $u_2 = 0,6$ м/с. Масса первого физика $m_1 = 60$ кг, а масса второго физика $m_2 = 78$ кг. Найдите модуль скорости каждого физика и горизонтального участка верёвки относительно озера.

$$v_1 = 1,6 \text{ м/с} \quad v_2 = 0,4 \text{ м/с} \quad v_{\text{верёвки}} = 0,4 \text{ м/с}$$

[Овчинкин] → [4.11](#), [4.12](#), [4.14](#), [4.27](#), [4.54](#), [4.55](#), [4.71](#), [4.118](#), [4.123](#), [4.124](#).

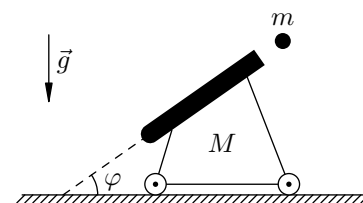
ЗАДАЧА 6. (МФТИ, 1991) Искусственный спутник Луны массой $M = 8$ кг движется вблизи её поверхности по круговой орбите. Метеорит массой $m = 0,1$ г, летящий со скоростью $v = 40$ км/с, перпендикулярной скорости спутника, попадает в спутник и застревает в нём. На какой угол повернётся из-за этого вектор скорости спутника? Радиус Луны $R = 1740$ км. Ускорение свободного падения на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле.

$$\tan \varphi = 0,1 \cdot \varepsilon \approx \left(\frac{g_{\text{Л}} \cdot R}{v^2} \right) \sin \alpha = \nu$$

ЗАДАЧА 7. (МФТИ, 1991) Космический аппарат массы $M = 40$ кг движется по круговой орбите радиуса $R = 6800$ км вокруг Марса. В аппарат попадает и застревает в нём метеорит, летевший со скоростью $v = 50$ км/с перпендикулярно направлению движения аппарата. При какой массе метеорита отклонение в направлении движения аппарата не превысит угол $\alpha = 10^{-4}$ рад? Масса Марса $M_0 = 6,4 \cdot 10^{23}$ кг. Гравитационная постоянная $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг · с²).

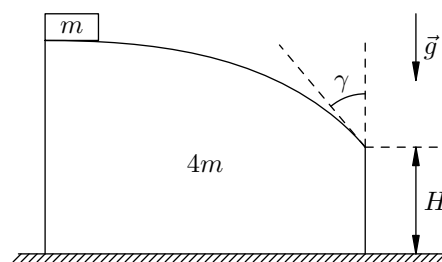
$$\sin \alpha \approx \frac{v}{v_{\text{орб}}} \approx \frac{v}{\sqrt{\frac{\gamma M_0}{R}}} \approx \nu$$

ЗАДАЧА 8. (МФТИ, 2002) Игрушечная пушка может скользить по рельсам, укрепленным на горизонтальном полу. Ствол пушки наклонён под углом φ к горизонту (см. рисунок). Масса пушки без снаряда равна M , масса снаряда — m . Из покоившейся пушки произведён выстрел. В результате пушка, не отрывавшаяся от рельсов, получила скорость u . На каком расстоянии от места выстрела снаряд упал на пол? Высоту пушки не учитывать. Направления всех движений параллельны плоскости рисунка.



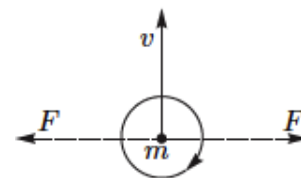
$$\cos \alpha \approx \frac{v_{\text{снар}}}{v_{\text{орб}}} = \nu$$

ЗАДАЧА 9. (МФТИ, 2002) Горка массой $4m$ с шайбой массой m покоятся на гладкой горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). От незначительного толчка шайба начинает скользить по горке без трения, не отрываясь от неё, и покидает горку. Горка, не отрывавшаяся от стола, приобретает скорость u . С какой скоростью шайба упадёт на стол? Нижняя часть поверхности горки составляет угол 30° с вертикалью и находится на расстоянии H от поверхности стола. Направления всех движений параллельны плоскости рисунка.



$$u \cos \alpha + v \sin \alpha = \nu$$

Задача 10. (Всеросс., 2016, финал, 9) На частицу массой m , имеющую скорость v , начинает действовать постоянная по модулю сила F , вектор которой за время действия τ поворачивается с постоянной угловой скоростью на угол 180° (см. рисунок). Векторы скорости частицы и силы всё время находятся в плоскости рисунка. В начальный момент угол между силой F и скоростью частицы составлял 90° . Определите модуль и направление конечной скорости частицы u через время τ после начала действия силы F . Влиянием других сил можно пренебречь.



$$\frac{u_x}{v_x} \mp a = n$$

Задача 11. (Всеросс., 1994, ОЭ, 11) После удара футболиста по неподвижному мячу тот приземлился на расстоянии $l_1 = 10$ м от футболиста через время $t = 1$ с. Во сколько раз нужно изменить значение импульса силы, действующей на мяч, чтобы он приземлился через то же время на расстоянии $l_2 = 20$ м? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

$$\frac{\left(\frac{\tau}{\tau^2 b}\right) + \frac{1}{\tau} l}{\left(\frac{\tau}{\tau^2 b}\right) + \frac{2}{\tau} l} \sqrt{\quad} = \frac{2 \nabla^2 l}{\nabla^2 l}$$

[Овчинкин] → 2.28.