

Общая формула линзы

Переходим к изучению *тонкой* линзы, то есть линзы, толщина которой много меньше радиусов её сферических поверхностей. Основным инструментом — уже известная вам формула

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{R}, \quad (1)$$

которая описывает преломление на одной сферической поверхности.

ЗАДАЧА 1. Рассмотрим *двояковыпуклую* линзу с радиусами сферических поверхностей R_1 , R_2 и показателем преломления n . Линза находится в воздухе, точечный источник света S — на расстоянии a от неё. Действительное изображение S' источника находится на расстоянии b от линзы.

- Покажите на рисунке изображение S' . Покажите изображение S_1 источника S , даваемое первой поверхностью. Убедитесь, что S_1 есть мнимое изображение источника в S' , даваемое второй поверхностью.
- Запишите формулу (1) для пар (S, S_1) и (S', S_1) . Выведите отсюда *формулу тонкой линзы*:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (2)$$

или

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

где

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

есть оптическая сила линзы (величина, обратная фокусному расстоянию).

ЗАДАЧА 2. Убедитесь, что формула (2) справедлива для любой другой тонкой линзы: плоско-выпуклой, плоско-вогнутой, выпукло-вогнутой, вогнуто-выпуклой и двояковогнутой. При каком соглашении о знаках величин?

ЗАДАЧА 3. Немного изменим обозначения и перейдём к самой общей ситуации. Пусть имеется тонкая линза с радиусами сферических поверхностей R_a , R_b и показателем преломления n . Со стороны первой поверхности (R_a) находится среда с показателем преломления n_a , со стороны второй поверхности — среда с показателем преломления n_b . Выведите обобщение формулы (2):

$$\frac{n_a}{a} + \frac{n_b}{b} = \frac{n-n_a}{R_a} + \frac{n-n_b}{R_b}.$$

ЗАДАЧА 4. Дана плосковыпуклая линза с радиусом сферической поверхности R и показателем преломления n . Покажите, что фокусное расстояние этой линзы равно

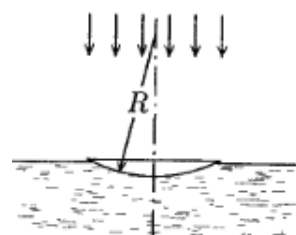
$$f = \frac{R}{n - 1}.$$

Получите аналогичный результат для плосковогнутой линзы.

ЗАДАЧА 5. Снова рассмотрим плосковыпуклую линзу с радиусом сферической поверхности R и показателем преломления n . Предположим, что её плоская поверхность совпадает с границей раздела двух прозрачных сред a и b , показатели преломления которых равны n_a и n_b . Параллельный пучок света идёт из среды a в среду b перпендикулярно границе раздела. Найдите место фокусировки пучка, если линза целиком находится 1) в среде b ; 2) в среде a .

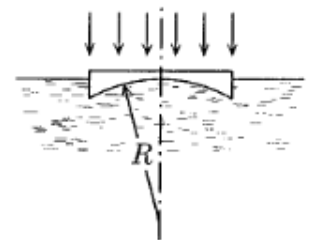
$$\frac{n_a - n_b}{R} = \frac{1}{f} \quad \left(\text{или} \quad \frac{n_b - n_a}{R} = \frac{1}{f} \right)$$

ЗАДАЧА 6. (МФТИ, 2003) Тонкая плосковыпуклая линза, изготовленная из стекла с показателем преломления $n_2 = 1,66$, выпуклой стороной с радиусом кривизны $R = 12$ см притоплена в воду (см. рисунок). Показатель преломления воды $n_1 = 1,33$. На каком расстоянии от линзы и где будет находиться изображение Солнца, находящегося в зените?



$$d = \frac{R n_2}{n_1 - n_2} = 48,4 \text{ см, в воде}$$

ЗАДАЧА 7. (МФТИ, 2003) Тонкая рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F = -15$ см вогнутой стороной с радиусом кривизны $R = 10$ см притоплена в воду (см. рисунок). Показатель преломления воды $n = 1,33$. На каком расстоянии от линзы и где будет находиться изображение Солнца, находящегося в зените?



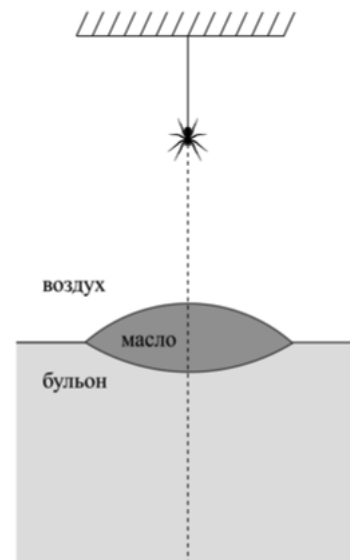
$$d = \frac{R n}{n - 1} = 39,5 \text{ см, в воздухе}$$

ЗАДАЧА 8. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Тонкая плосковыпуклая линза немного погружена в воду своей горизонтальной плоской стороной (выпуклая поверхность линзы находится в воздухе). На линзу падает сверху узкий вертикальный пучок света, ось которого проходит точно через вершину выпуклой поверхности. Этот пучок фокусируется в воде на глубине $h = 27$ см. Оптическая сила линзы в воздухе $D = 5$ дптр. Найти показатель преломления воды.

$$n \approx 1,35$$

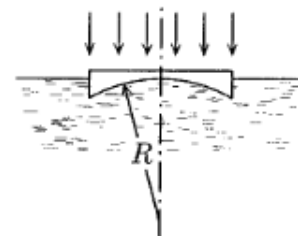
ЗАДАЧА 9. («Курчатов», 2018, 11) На ровном горизонтальном столе находится тарелка с бульоном, на поверхности которого плавают масляные капли. Над тарелкой находится паучок Аркаша, который спускается по паутине с постоянной скоростью v . В некоторый момент времени, оказавшись на высоте h над одной из капель с радиусами кривизны R_1 (поверхность воздух–масло) и R_2 (поверхность бульон–масло), Аркаша увидел свое изображение на дне тарелки. Определите фокусные расстояния линзы, образуемой масляной каплей на поверхности бульона (см. рисунок) и скорость изображения Аркаши в системе отсчёта паучка в этот момент. Показатели преломления масла, бульона и воздуха известны и находятся в соотношении $n_m > n_b > n_v \approx 1$.

$$a - \frac{1f - u}{1f} \vartheta_{ua} = n : 1f \vartheta_{u} = \vartheta_f : \frac{1u - v u}{\vartheta_H 1u} + \frac{\vartheta_H (1 - v u)}{\vartheta_H 1u} = 1f$$



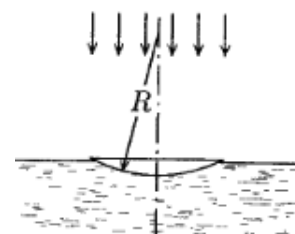
ЗАДАЧА 10. (МФТИ, 2003) Тонкая плосковогнутая линза, изготовленная из стекла с показателем преломления $n_2 = 1,66$, вогнутой стороной с радиусом кривизны $R = 14$ см притоплена в воду (см. рисунок). Показатель преломления воды $n_1 = 1,33$. На каком расстоянии от линзы и где будет находиться изображение Солнца, находящегося в зените?

$$q = \frac{1u - \vartheta u}{1u} = \frac{1u - \vartheta u}{1u} = q$$

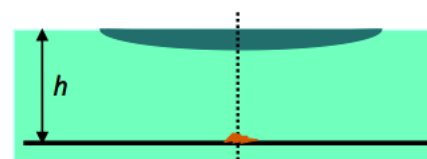


ЗАДАЧА 11. (МФТИ, 2003) Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 20$ см выпуклой стороной с радиусом кривизны $R = 15$ см притоплена в воду (см. рисунок). Показатель преломления воды $n = 1,33$. На каком расстоянии от линзы и где будет находиться изображение Солнца, находящегося в зените?

$$q = \frac{1(1-u) - u}{1u} = q$$



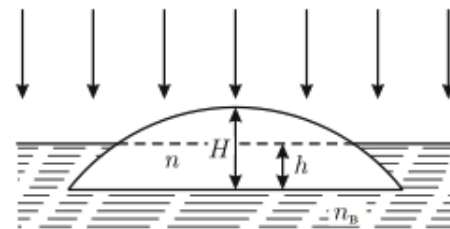
ЗАДАЧА 12. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Однажды профессор Челленджер производил наблюдения за обитателями пруда с чистой водой. При этом он использовал плосковыпуклую тонкую линзу, фокусное расстояние которой в воздухе равнялось $F = 30$ см. Линза размещалась на поверхности воды (см. рисунок).



Профессор рассматривал мелкий объект, находившийся точно под центром линзы на глубине $h = 63$ см. С каким поперечным увеличением был виден объект? Известно, что показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза, $n_l = 2$, показатель преломления воды $n \approx \sqrt{2} \approx 1,414$.

$$L' L \approx \frac{u(u-vu) - 1u(1-vu)}{1u(1-vu)} = L$$

ЗАДАЧА 13. (МОШ, 2006, 11) В воду (показатель преломления $n_{\text{в}}$) частично погружена тонкая стеклянная плосковыпуклая линза, причём её плоская сторона горизонтальна и находится под водой, а толщина линзы равна H (см. рисунок). На эту систему вертикально падает параллельный пучок света. На глубинах l и $L > l$ в воде возникают два одинаково ярких изображения. Каковы радиус R выпуклой поверхности линзы, показатель преломления n материала линзы и глубина h её погружения в воду? Отражением света от воды и от линзы, а также поглощением света пренебречь.

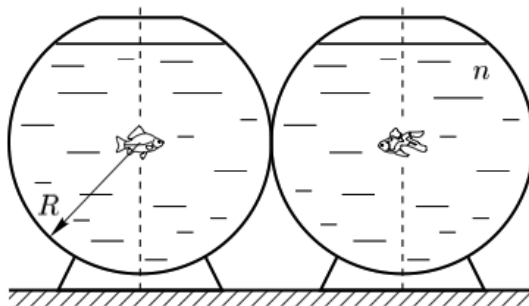


$$\frac{c}{H} = \eta : \frac{l-T}{l-T^{\text{qu}}} = u : \frac{(l-T)^{\text{qu}}}{(l-T^{\text{qu}})lT} = \mathcal{Y}$$

ЗАДАЧА 14. (Всеросс., 1994, ОЭ, 11) На сколько процентов изменится фокусное расстояние тонкой плосковыпуклой линзы при её нагреве от 0°C до 100°C , если при 0°C фокусное расстояние равно F_0 , а показатель преломления n ? Коэффициент линейного расширения материала линзы $\alpha = 25 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$. Линза изготовлена из материала плотности ρ . Можно считать, что $(n - 1) \sim \rho$.

$$\% \Delta = \Delta \nabla \circ \nabla = \frac{\circ \Delta}{\Delta \nabla}$$

ЗАДАЧА 15. (Всеросс., 2009, РЭ, 11) В речке поймали карася и посадили в шарообразный аквариум радиуса R , а рядом поставили точно такой же аквариум с золотой рыбкой (рис.). Карасю такая соседка показалась необычной, и он начал с интересом разглядывать её, плавая в центре аквариума. Заметив наблюдение, золотая рыбка тоже замерла в центре аквариума и стала вглядываться в своего соседа.



1. На каком расстоянии с точки зрения карася плавает золотая рыбка, если показатель преломления воды в аквариумах равен $n = 4/3$?
2. Во сколько раз видимый поперечный размер золотой рыбки отличается от её истинного размера?
3. Прямое или перевёрнутое изображение соседки видит карась?

Примечание. Считайте, что размеры рыбок много меньше R .

$$1) \text{ } 3R; 2) \text{ } 1 = 2; 3) \text{ } \text{прямое}$$

ЗАДАЧА 16. (Всеросс., 2008, ОЭ, 11) Прозрачная пластина с показателем преломления n ограничена двумя сферическими поверхностями с радиусами кривизны R и $r < R$.

1) Какой должна быть толщина пластины L , чтобы падающий на поверхность с радиусом кривизны R параксиальный пучок света преобразовывался в параллельный?

2) Во сколько раз увеличивается интенсивность пучка света (энергия, переносимая за единицу времени через единицу площади) после прохождения через пластину?

3) Какое угловое увеличение для удалённых предметов даёт пластина?

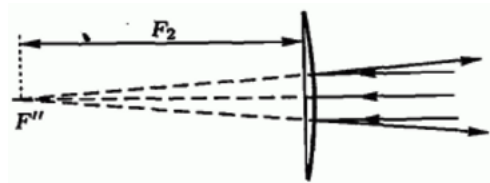
Потерями энергии пучка внутри пластины можно пренебречь.

$$\frac{1}{f} \left(\varepsilon : \frac{r}{R} \right) \left(z : \frac{1-u}{u} (L \mp r) \right) = \tau \quad (1)$$

ЗАДАЧА 17. (МОШ, 2009, 11) Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием F и зеркального шарика радиусом R , центр которого находится на главной оптической оси линзы на расстоянии d от неё. Определить расстояние a от линзы до точечного источника света S , расположенного на оптической оси системы, если изображение источника в данной системе совпадает с самим источником.

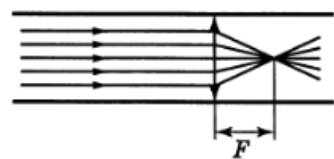
$$d \gg R \text{ или } d \ll R \text{ или } d \approx R \text{ или } d > R \text{ или } d < R \text{ или } \frac{d-R}{R} = \nu \text{ или } \frac{d+R}{R} = \nu \text{ или } \frac{d-R}{R} = \nu \text{ или } \frac{d+R}{R} = \nu \text{ или } \frac{d-R}{R} = \nu$$

ЗАДАЧА 18. (Всеросс., 2004, ОЭ, 10) Сферическую поверхность плоско-выпуклой линзы с фокусным расстоянием F_1 посеребрили. Если на выпуклую сторону такой системы направить пучок лучей, параллельных главной оптической оси, то отражённые лучи будут распространяться так, как будто они были испущены из точки F'' , находящейся на расстоянии F_2 от линзы (рис.). Найдите построением точку F (фокус системы), в которой сойдётся пучок лучей, параллельных главной оптической оси и падающих на плоскую поверхность линзы. Выразите фокусное расстояние F_0 системы через F_1 и F_2 . Фокусное расстояние линзы много больше её диаметра, а посеребрённая поверхность полностью отражает свет.



$$\frac{2}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_0}$$

ЗАДАЧА 19. (Всеросс., 1997, ОЭ, 10) В трубе установлена собирающая линза (рис.). Слева на неё падает параллельный пучок света, который собирается в фокусе линзы. Как изменится (увеличится, останется прежним, уменьшится) фокусное расстояние F системы линза-вода, если:



а) в левую часть трубы залить воду, а в правой оставить воздух;

б) в левой оставить воздух, а в правую залить воду?

Известно, что показатель преломления материала линзы больше показателя преломления воды ($n_{\text{л}} > n_{\text{в}}$). Рассмотрите все возможные варианты.