Эврика!

Жизнь выдающегося древнегреческого учёного Архимеда окружена легендами. Самая известная из них связана с практической задачей определения объёма тела сложной формы.

Корона тирана Гиерона была сделана из золота и серебра. Возникло подозрение, что ювелир прикарманил часть золота, заменив его серебром, и к расследованию был привлечён Архимед. Понятно, что надо было вычислить среднюю плотность короны и сравнить её с заданной; масса короны известна, но как найти её объём? Решение пришло при погружении в ванну: уровень воды поднялся, и Архимеда осенило, что **погружённое тело вытесняет объём воды, равный собственному объёму**. Архимед выскочил из ванны и, даже не одевшись, помчался по улицам с криком «Эврика!», что по-древнегречески означает «Нашёл!».

Задача 1. В стакан, доверху наполненный водой, опустили железную гирьку массой 100 г. Какая масса воды вылилась из стакана? Плотность железа 7800 кг/м^3.

12,8 г

Задача 2. (*Всеросс., 2013, ШЭ, 7*) Озадаченный Змей Горыныч прилетел к Бабе Яге: «Доставай-ка, старая, свои приборы колдовские и скажи, что за железку я добыл, которую, как мне сказали, ценить скоро будут под стать золоту?» Достала Баба Яга приборы нужные, попыхтела, побегала — тяжёлая железка, Бабе Яге самой не поднять. Попросила она Змея Горыныча положить железку на чашу весов, а на другую чашу стала устанавливать мешки с алмазами. Потом приказала Змею снять железку с чаши и медленно опустить её в заветный сосуд, доверху наполненный студёной водой, и стала считать, сколько амфор мерных выльется из носика сосуда. В конце Баба Яга подумала и сказала: «Тяжела железка-то твоя — как 10 мешков по 80 камней алмазных по 1000 карат каждый; и водички-то вылилось аж 2 амфоры с четвертью…»

Какова плотность металла, добытого Змеем Горынычем? Ответ представить **в системных единицах**, округлив до целого числа.

Для справки: 1 карат = 0,2 г, 1 амфора = 26,3 литра.

2704 кг/м^3

Задача 3. (*Всеросс., 2010, РЭ, 7*) На рисунке слева приведена фотография мерного сосуда с вертикальными стенками до погружения в него цилиндрического груза. На ней видно, что объём воды в сосуде равен 40 мл. Фотография сосуда после погружения цилиндра приведена на рисунке справа. Чему равен объём V грузика?

$V = 20$ мл

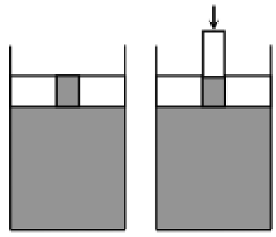
Задача 4. (*«Росатом», 2016, 7*) Если в банку массой $m_1 = 50$ г налить доверху воду, масса банки станет равна $m_2 = 250$ г. Если из банки вылить воду, но положить несколько камней, масса банки станет равна $m_3 = 450$ г. Если теперь в банку с камнями доверху налить воду, она будет весить $m_4 = 550$ г. Найти отношение плотности воды к плотности камней.

$\boxed{1/4}$

Задача 5. (*«Росатом», 2018, 7*) Вес ведёрка, до краёв заполненного водой, равен $P_1 = 20$ Н. В ведёрко кладут камень, плотность которого втрое больше плотности воды и который полностью погружается в воду. Вес ведёрка становится равным $P_2 = 24$ Н. Каким будет вес ведёрка, если из него аккуратно вытащить первый камень, а положить другой камень, с той же плотностью, но с вдвое меньшим объёмом, чем у первого?

$\boxed{P = \frac{3P_1+P_2}{4} = 21 \text{ Н}}$

Задача 6. (*«Росатом», 2019, 7*) На поверхности воды в высоком цилиндрическом стакане лежит поршень толщиной $d = 3$ см с цилиндрическим отверстием. Площадь поперечного сечения стакана $S_1 = 20$ см^2. Площадь сечения отверстия $S_2 = 5$ см^2. В равновесии вода доходит до верхнего края отверстия (см. левый рисунок). В отверстие вставляют пробку, диаметр которой совпадает с диаметром отверстия, и начинают нажимать на нее пальцем (см. правый рисунок). Насколько переместится пробка, когда дойдет до нижнего края поршня? Зазоры между поршнем и стенками стакана и между пробкой и стенками отверстия воду не пропускают.



$\boxed{\Delta x = \frac{S_1-S_2}{S_1} d = 2{,}25 \text{ см}}$

Задача 7. (*МОШ, 2016, 7*) В бочку объёмом 90 л, которая была на две трети объёма заполнена мёдом, залез Винни-Пух. При этом уровень мёда поднялся до краёв и 9 кг мёда вытекли наружу. Из бочки осталась торчать только голова Винни-Пуха, объём которой равен одной десятой объёма медведя. Определите массу Винни-Пуха, если его средняя плотность 1000 кг/м^3. Плотность мёда 1500 кг/м^3.

$\boxed{40 \text{ кг}}$

Задача 8. (*Олимпиада Физтех-лицея, 2015, 7–9*) Масса до краёв заполненной пробирки с водой $M_1 = 200$ г. После того как в неё поместили кусочек металла массой $m = 46$ г, масса пробирки стала равна $M_2 = 241$ г. Определить плотность металла, если плотность воды равна 1 г/см^3. Ответ выразить в г/см^3, округлив до десятых.

$\boxed{9{,}2}$

Задача 9. (*«Росатом», 2014, 7*) Сосуд объёмом $V = 1000$ см^3 на три четверти заполнен водой. Когда в сосуд погрузили кусок меди, уровень воды поднялся и часть воды объёмом $V_0 = 100$ см^3 вылилась через край. Найти массу куска меди. Плотность меди $\rho = 8{,}9$ г/см^3.

$\boxed{m = \rho\left(\frac{V}{4} + V_0\right) = 3{,}12 \text{ кг}}$

Задача 10. (*МОШ, 2012, 7*) Вес груза в воздухе составляет 17 Н. Когда этот груз опустили в сосуд с водой, имеющий форму куба со стороной 1 дм, он утонул, полностью покрывшись водой, а её уровень поднялся на 2 см, не достигнув верхнего края сосуда. Определите плотность материала груза.

8500 кг/м^3

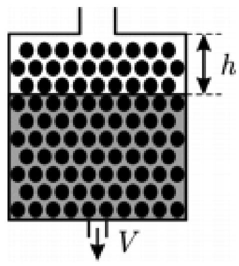
Задача 11. (*МОШ, 2015, 7*) Вася наполнил две одинаковые лёгкие пластиковые бутылки ёмкостью 1 литр кварцевым песком по самое горлышко и взвесил их. Получились одинаковые массы 1530 г. Затем Вася аккуратно пересыпал песок из одной бутылки в пакет, заполнил бутылку наполовину водой и медленно высыпал весь песок из пакета обратно в эту бутылку, которая снова оказалась заполненной по самое горлышко смесью песка с водой. Весы показали массу бутылки 1866 г. Какова плотность кварца?

2,3 г/см^3

Задача 12. (*МОШ, 2017, 7*) В стакан, до краёв заполненный жидкостью, аккуратно помещают небольшой однородный шарик, который тонет и опускается на дно. В результате средняя плотность содержимого стакана становится равной $\rho_1 = 1200$ кг/м^3. Затем в стакан добавляют ещё один такой же шарик, и средняя плотность содержимого становится равной $\rho_2 = 1260$ кг/м^3. Определите плотность ρ_0 жидкости в стакане.

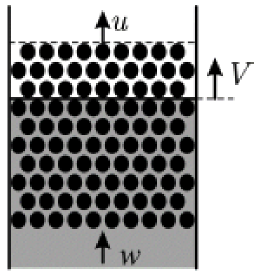
$\rho_0 = 2\rho_1 - \rho_2 = 1140$ кг/м^3

Задача 13. (*МОШ, 2018, 7*) Цилиндрический фильтр с поперечным сечением $S = 100$ см^2 и объёмом $V_0 = 2$ литра заполнен водой и однородно распределёнными гранулами объёмом $\Omega = 0{,}8$ см^3 каждая. Когда снизу открыли кран и через него вытек объём воды $V = 0{,}13$ литра, то уровень воды в фильтре понизился на $h = 5$ см. Сколько гранул находится в фильтре? Расположение гранул при вытекании воды из фильтра остаётся неизменным.



$N_0 = \frac{V_0(Sh - V)}{Sh\Omega} = 1850$

Задача 14. (*МОШ, 2018, 8*) В цилиндрическую трубу постоянного сечения, частично заполненную толстым слоем орехов, снизу поступает вода со скоростью $w = 0{,}5$ см/с. Орехи при этом всплывают как единое целое со скоростью $u = 0{,}2$ см/с (скорости w и u отличаются потому, что между стенками трубы и орехами есть трение). Объём одного ореха $\Omega = 25$ см^3, в одном литре их содержится $n = 30$ штук. Найдите скорость V подъёма уровня воды внутри слоя орехов (то есть границы между сухими и мокрыми орехами). Ниже уровня воды зазоры между орехами полностью заполнены водой, а выше этого уровня — воздухом.



$V = \frac{w - nu\Omega}{1 - n\Omega} = 1{,}4$ см/с

Задача 15. (*МОШ, 2018, 8*) В пол-литровую кружку, доверху заполненную водой, погрузили грузик массой 200 г. Определите, на сколько изменится плотность содержимого кружки. Плотность воды 1 г/см^3, плотность груза 11,3 г/см^3.

На 0,36 г/см^3

Задача 16. (*«Росатом», 2012, 8*) В аквариум, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами $a \times 2a \times 3a$ ($a = 0{,}5$ м), налили воду, объём которой составляет 8/9 объёма аквариума. Затем в аквариум опустили камни массой $m = 30$ кг. Выльется ли вода из аквариума? Плотность камней $\rho = 2{,}6$ г/см^3, а плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3.

Выльется 32 л воды

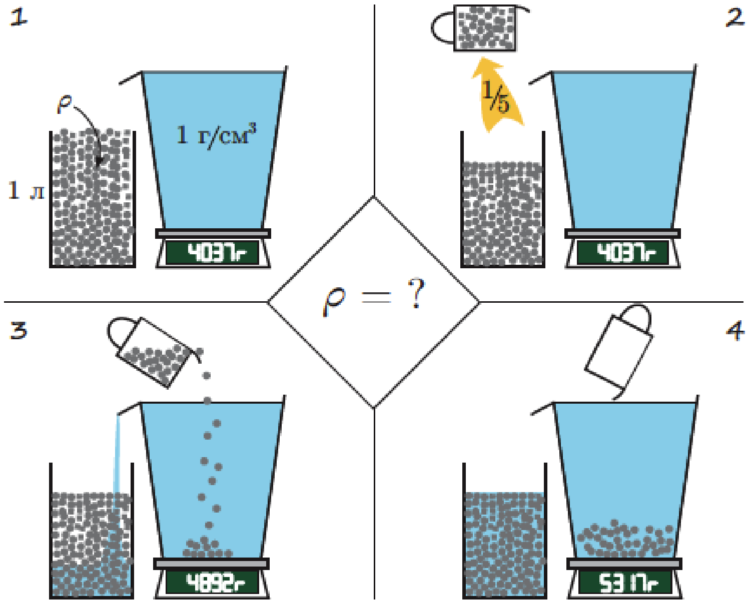
Задача 17. (*МОШ, 2014, 8*) В известном опыте «Бездонный бокал» в стеклянный бокал, доверху наполненный водой, аккуратно опускают одну за другой булавки. При этом вода приподнимается над краями стакана, но не выливается из него (за счет явления смачивания).

Возьмём доверху наполненный водой цилиндрический стакан и взвесим его. Затем начнём аккуратно опускать в него булавки (длина булавки $l = 2{,}5$ см, толщина $d = 0{,}4$ мм) одну за другой до тех пор, пока вода не потечёт по внешним стенкам стакана. Так же аккуратно протрём стенки и края стакана от оставшихся капель воды и взвесим этот стакан с булавками и водой. Сколько булавок находится в стакане, если в результате взвешиваний было обнаружено, что изменение массы стакана (который сначала был с водой, но без булавок) составило $\Delta m = 19{,}21$ г?

Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3. Плотность металла, из которого изготовлены булавки, $\rho = 7800$ кг/м^3.

$N = \frac{4\Delta m}{(\rho-\rho_0)\pi d^2 l} = 899$ булавок

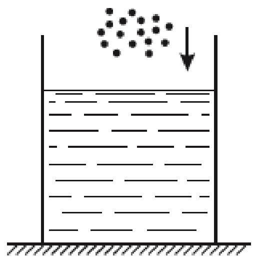
Задача 18. (*«Максвелл», 2016, финал, 7*) Изначально банка объёмом $V_0 = 1000$ мл доверху заполнена маленькими одинаковыми металлическими шариками (см. рисунок).



Одну пятую часть шариков высыпали в стоящий на весах мерный цилиндрический сосуд, заполненный водой. В результате показания весов увеличились с $m_0 = 4037$ г до $m_1 = 5317$ г, а уровень вылившейся в банку воды сравнялся с уровнем оставшихся шариков. Определите плотность материала, из которого изготовлены шарики, если плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3.

$\rho = \rho_0 + \frac{25(m_1 - m_0)}{4V_0} = 9000$ кг/м^3

Задача 19. (*МОШ, 2009, 8*) На столе стоит цилиндрический стакан с водой (см. рисунок). В его середину начинают медленно насыпать мелкие стеклянные шарики. Процесс насыпания продолжается до тех пор, пока некоторое количество шариков не высыпется из стакана. Нарисовать и пояснить, не проводя детальных расчетов, график зависимости суммарной силы F давления на дно стакана от веса p уже насыпанных шариков, если вес воды, заполнявшей стакан вначале примерно на $3/4$ высоты, был равен P, плотность стекла приблизительно в 2,5 раза больше плотности воды, а трением можно пренебречь.



См. конец листка

Задача 20. (*МОШ, 2019, 8*) Снежный покров состоит из верхнего слоя свежевыпавшего снега толщиной $H_1 = 20$ см и нижнего слоя старого слежавшегося снега толщиной $H_2 = 10$ см. В две одинаковые цилиндрические мензурки с внутренним диаметром $d_0 = 5$ см и высотой $h_0 = 7$ см были помещены образцы снега из каждого слоя, при этом снег в каждую мензурку засыпался доверху, но не утрамбовывался, снег из разных слоёв набирался в разные мензурки. После этого мензурки размещали на столе в отапливаемом помещении. На рис. приведена фотография, полученная в процессе эксперимента. Наблюдения показывают, что с течением времени снежный цилиндр уменьшается в размерах, но сохраняет свою форму. Высота нижней тёмной части снежного цилиндра со временем растёт. Слой воды заметной толщины появляется на дне мензурки после того, как весь снег становится тёмным. В мензурке со свежим снегом к моменту появления воды на дне диаметр цилиндра из снега оказывается равен $d_1 = 3$ см, а высота — $h_1 = 4$ см. На дне мензурки со слежавшимся снегом вода появляется, когда диаметр цилиндра из снега становится равен $d_2 = 4$ см, а высота — $h_2 = 5$ см.

Можно считать, что снег состоит из кристалликов льда и пустот между ними, внутренняя структура снега при таянии не меняется. Пористостью снега α называют отношение объема пустот ко всему объему снега: $\alpha = \frac{V_п}{V_0}$.

1. Определите пористости свежего и слежавшегося снега, считая что снег тает только на внешней поверхности цилиндров.

2. На улице резко потеплело. Снег стал таять. Оцените высоту снежного покрова в тот момент, когда из под него потекут ручьи. Можно считать, что таяние происходит при условиях, похожих на условия из п. 1), но снег тает только на верхней поверхности слоя.

Плотность льда равна $\rho_л = 900$ кг/м^3, плотность воды равна $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

1) $\alpha_1 = \frac{\rho_л(d_0^2h_0 - d_1^2h_1)}{(\rho_в-\rho_л)d_1^2h_1+\rho_л d_0^2h_0} \approx 0{,}78$, $\alpha_2 = \frac{\rho_л(d_0^2h_0 - d_2^2h_2)}{(\rho_в-\rho_л)d_2^2h_2+\rho_л d_0^2h_0} \approx 0{,}52$; 2) $H_{нераст.сн.} = H_2 - \frac{\rho_в\alpha_2H_2-\rho_л(1-\alpha_1)H_1}{\rho_л(1-\alpha_2)+\rho_в\alpha_2} \approx 8{,}7$ см

Ответ к задаче 19