

Теплоёмкость газа

Напомним, что *теплоёмкостью* тела называется отношение количества теплоты Q , которое нужно сообщить данному телу для повышения его температуры на ΔT , к величине ΔT :

$$C = \frac{Q}{\Delta T}.$$

Вам известно понятие удельной теплоёмкости вещества — это теплоёмкость, отнесённая к единице массы тела: $c = Q/(m\Delta T)$. В случае газов чаще используется *молярная* теплоёмкость, то есть теплоёмкость одного моля газа:

$$C_\mu = \frac{Q}{\nu\Delta T}.$$

У жидкостей и твёрдых тел удельная теплоёмкость есть табличная характеристика вещества. Для газов это не так. Удельная (или молярная) теплоёмкость газа зависит от процесса, совершаемого над данной порцией газа (существуют даже процессы, в которых теплоёмкость газа не остаётся постоянной; такие процессы, правда, в школьной программе не рассматриваются).

ЗАДАЧА 1. (*Формула Майера*) Пусть C_p — молярная теплоёмкость идеального газа в изобарическом процессе, C_V — молярная теплоёмкость этого же газа в изохорическом процессе. Докажите, что $C_p - C_V = R$, где R — газовая постоянная.

ЗАДАЧА 2. (*«Физтех», 2019, 10*) Теплоизолированный сосуд объемом V разделен на две части перегородкой. В одной части находится гелий в количестве ν при температуре T_1 , а в другой — азот в количестве 3ν при температуре $\frac{6}{5}T_1$ и другом давлении. Перегородка прорывается. Известно, что молярная теплоемкость азота при постоянном объеме равна $2,5R$.

1. Какая температура T_2 , установится в смеси?
2. Найти давление P в смеси.

$$\frac{1}{\nu} \frac{Q}{\Delta T} = \nu \frac{Q}{\Delta T} = \nu C_V$$

ЗАДАЧА 3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11*) Чему равна теплоёмкость одного моля одноатомного идеального газа в процессе сжатия газа, в котором его давление убывает пропорционально объёму? Ответ обосновать.

$$C = \frac{5}{2}R$$

ЗАДАЧА 4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11*) При расширении одного моля одноатомного идеального газа зависимость его абсолютной температуры от произведённой им работы оказалась линейной:

$$T = T_0 - \frac{bA}{R}$$

(здесь R — универсальная газовая постоянная). При каких значениях b теплоёмкость газа в этом процессе отрицательна?

$$\frac{3}{2}R > q > 0$$

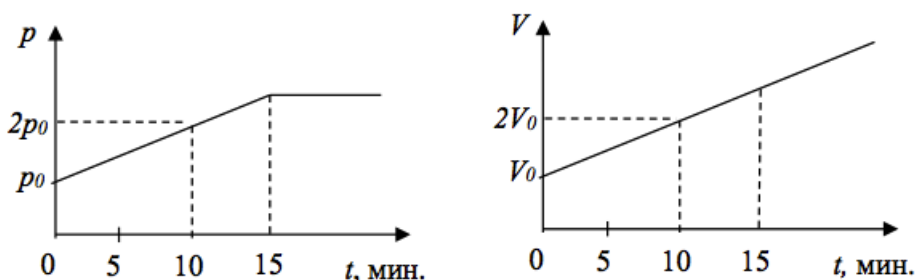
ЗАДАЧА 5. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Постоянное количество гелия участвует в процессе, в котором его давление сначала остаётся постоянным, затем возрастает в $n = 2$ раза так, что его объём изменяется пропорционально давлению, а затем снова остаётся постоянным. Зная, что конечная температура гелия в $k = 1,2$ раза больше начальной, и что полное количество теплоты, которым гелий обменялся с окружающими телами в этом процессе, равно нулю, найдите отношение максимального и минимального объёма гелия в этом процессе.

$$\varepsilon = \frac{(1-\eta)\varepsilon}{1-\varepsilon^u} = \nu$$

ЗАДАЧА 6. (МОШ, 2018, 11) Экспериментально определить отношение теплоёмкостей газа при постоянном давлении и постоянном объёме $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ можно следующим методом. Определённое количество молей газа ν , начальные значения объёма и давления которого равны V и p , нагревают дважды с помощью спирали, по которой пропускают один и тот же ток в течение одинакового времени: сначала — при постоянном объёме, причём конечное давление составляет p_1 , затем — при постоянном давлении, причём конечный объём составляет V_2 . Найдите по этим данным γ , считая газ идеальным. Теплоёмкостью спирали и стенок сосуда можно пренебречь.

$$\frac{(\lambda - \varepsilon \lambda)^{1d}}{(d - \varepsilon d)\lambda} = \nu$$

ЗАДАЧА 7. (Всеросс., 2017, ШЭ, 11) На графиках приведены зависимости от времени t давления p и объёма V одного моля одноатомного идеального газа. Определите, как со временем изменялась теплоёмкость данного количества газа. Постройте график зависимости этой теплоёмкости от времени.



$$\nu \frac{z}{\varepsilon} = C \text{ при } t \geq 15 \text{ мин; затем } C = 2R \text{ при } t \leq 10 \text{ мин}$$

ЗАДАЧА 8. (МОШ, 2018, 11) Идеальному газу, находящемуся в вертикальном цилиндре под невесомым подвижным поршнем, сообщают количество теплоты $Q = 300$ Дж. Внутренняя энергия газа при этом увеличивается на $\Delta U = 200$ Дж. Найдите изменение объёма газа и определите его молярную теплоёмкость при постоянном объёме. Внешнее атмосферное давление равно $p_A = 100$ кПа.

$$C_V = \nu R$$

ЗАДАЧА 9. (Всеросс., 2018, МЭ, 11) В некотором процессе над газом совершена работа $A' = 100$ Дж, при этом его внутренняя энергия возросла на $\Delta U = 80$ Дж, а температура увеличилась на $\Delta t = 10^\circ\text{C}$. Найдите среднюю теплоёмкость газа в этом процессе.

$$C = \frac{A' - \Delta U}{\nu \Delta t} = \nu R$$

ЗАДАЧА 10. («Физтех», 2009) Моль гелия совершает работу $A = 5,5$ кДж в процессе, в котором молярная теплоёмкость газа постоянна и равна $c = 18$ Дж/(моль·К). Во сколько раз изменилось давление гелия, если его объём увеличился в 4 раза? Начальная температура газа $T_1 = 142$ К.

$$\gamma \approx \frac{1,4(18-27)}{V} + \frac{p}{T} = \frac{1,4}{27}$$

ЗАДАЧА 11. (МФТИ, 2006) Астронавты, исследуя воздух открытой ими планеты, нагрели порцию воздуха массой $m = 200$ г на $\Delta T = 60^\circ\text{C}$ один раз при постоянном давлении, а другой раз — при постоянном объёме. Оказалось, что при постоянном давлении требуется подвести на $\Delta Q = 1$ кДж больше тепла, чем при постоянном объёме. Найдите среднюю молярную массу воздуха, считая его идеальным газом.

$$\text{мол/г} \cdot 100 \text{г} = \frac{\partial \Delta Q}{\partial \Delta T} = \nu$$

ЗАДАЧА 12. (МФТИ, 1995) В вакуумной теплоизолированной камере находятся два масляных пузыря одинакового размера, один из которых наполнен гелием, а другой — водородом, до давления p_0 каждый. Найти отношение давления p , установившегося в камере после того, как пузыри лопнули, к начальному давлению газа в пузырях. Отношение температуры гелия T_1 к температуре водорода T_2 составляет $T_1/T_2 = 0,6$. Молярная теплоёмкость гелия при постоянном объёме $C_{V_1} = \frac{3}{2}R$, водорода — $C_{V_2} = \frac{5}{2}R$, где R — газовая постоянная. Объём пузыря в 160 раз меньше объёма камеры. Изменением поверхностной энергии плёнок при разрыве пузырей пренебречь.

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\frac{\nu_1 C_{V_1} \frac{\nu_1}{V} + \nu_1 C_{V_2} \frac{\nu_2}{V}}{\nu_1 C_{V_1} + \nu_2 C_{V_2}} \left(\frac{\nu_1}{\nu_1} + 1 \right) \frac{\Delta Q}{0,1} = \frac{0,6}{1}$$

ЗАДАЧА 13. (МФТИ, 1996) Гелий из состояния с температурой $T_1 = 200$ К расширяется в процессе $pV^2 = \text{const}$ (p — давление, V — объём газа) с постоянной теплоёмкостью C . От газа отвели количество теплоты $Q = 415$ Дж, и конечный объём газа стал вдвое больше начального.

- 1) Определить конечную температуру гелия.
- 2) Определить теплоёмкость C .

$$\text{К} \cdot T_2 = \frac{2}{T_1} = C \quad (2) \quad \text{К} \cdot 100 = \frac{2}{200} = 4,15 \text{ Дж/К}$$

ЗАДАЧА 14. (МФТИ, 1996) Гелий из состояния с температурой $T_1 = 200$ К расширяется в процессе $p^2V = \text{const}$ (p — давление, V — объём газа) с постоянной теплоёмкостью C . К газу подвели количество теплоты $Q = 2190$ Дж. Конечное давление газа вдвое меньше начального.

- 1) Определить конечную температуру гелия.
- 2) Определить теплоёмкость C .

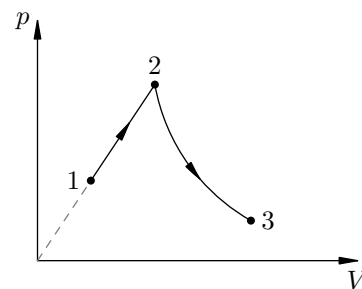
$$\text{К} \cdot T_2 = 2T_1 = C \quad (2) \quad \text{К} \cdot 100 = 400 = 2190 \text{ Дж/К}$$

ЗАДАЧА 15. (МФТИ, 1996) Гелий в количестве $\nu = 4$ моля сжимают в процессе с постоянной теплоёмкостью C . От газа отвели количество теплоты, равное изменению его внутренней энергии, и температура газа увеличилась на $\Delta T = 100$ К.

- 1) Чему равна работа, совершённая газом?
- 2) Определить теплоёмкость C .

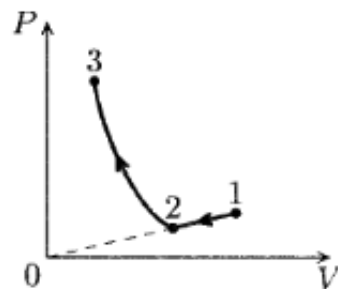
$$\Delta A = -3\nu R \Delta T = -10 \text{ кДж}; \quad (2) \quad C = -\frac{2}{3} \nu R \approx -50 \text{ Дж/К}$$

ЗАДАЧА 16. (МФТИ, 2002) Моль гелия, расширяясь в процессе 1–2 (см. рисунок), где его давление p меняется прямо пропорционально объёму V , совершает работу A . Из состояния 2 гелий расширяется в процессе 2–3, в котором его теплоёмкость C остаётся постоянной и равной $C = R/2$ (R — газовая постоянная). Какую работу A_{23} совершит гелий в процессе 2–3, если его температура в состоянии 3 равна температуре в состоянии 1?



$$A_{23} = 2A$$

ЗАДАЧА 17. (МФТИ, 2002) Моль гелия сжимают из начального состояния 1 в конечное состояние 3 в двух процессах (см. рисунок). Сначала сжатие идёт в процессе 1–2, когда давление гелия p прямо пропорционально его объёму V . Затем из состояния 2 газ сжимают в процессе 2–3 с постоянной теплоёмкостью так, что тепло подводится к газу. В конечном состоянии 3 температура гелия равна его температуре в состоянии 1. Найти теплоёмкость газа в процессе 2–3, если в процессе сжатия 1–2 над газом совершена работа A ($A > 0$), а в процессе 2–3 над газом совершена работа $2A$.



$$C = R/2$$

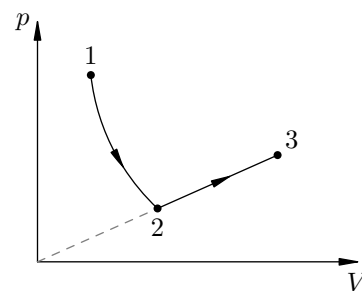
ЗАДАЧА 18. (МФТИ, 2006) С идеальным одноатомным газом проводят циклический процесс 1–2–3–1, состоящий из адиабатического расширения 1–2, расширения в процессе 2–3, в котором теплоёмкость газа оставалась постоянной, и сжатия в процессе 3–1 с линейной зависимостью давления от объёма. $T_1 = 2T_2 = T_3$, $V_3 = 4V_1$. Найдите молярную теплоёмкость газа в процессе 2–3, если работа, совершённая над газом в цикле, составляет $7/15$ от работы, совершённой над газом в процессе 3–1.

$$c = 2R$$

ЗАДАЧА 19. (МФТИ, 2006) С идеальным одноатомным газом проводят циклический процесс 1–2–3–1, состоящий из расширения в процессе 1–2, в котором молярная теплоёмкость газа постоянна и равна $2R$, адиабатического расширения 2–3 и сжатия в процессе 3–1 с линейной зависимостью давления от объёма. $T_1 = T_2/2 = T_3$, $V_3 = 4V_1$. Найдите работу, совершённую газом в процессе 1–2–3, если работа, совершённая газом в цикле, составила 100 Дж.

$$A_{123} = 1600 \text{ Дж}$$

ЗАДАЧА 20. («Физтех», 2010) Газообразный гелий из начального состояния 1 расширяется в процессе 1–2 с постоянной теплоёмкостью, совершая в нём работу $A_{12} = 400$ Дж. Затем к газу подводится количество теплоты $Q_{23} = 400$ Дж в процессе 2–3, в котором давление прямо пропорционально объёму (см. рисунок). Температуры в состояниях 1 и 3 равны.

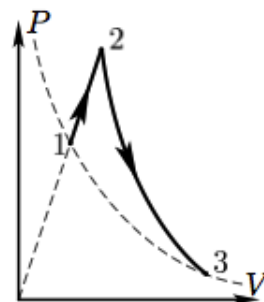


1) Найдите количество теплоты, подведённое к газу в процессе 1–2.

2) Найдите молярную теплоёмкость газа в процессе 1–2, выразив её через R .

$$1) Q_{12} = A_{12} = 400 \text{ Дж}; 2) c = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) R = \frac{2}{15} R$$

ЗАДАЧА 21. («Физтех», 2010) Газообразный гелий из начального состояния 1 расширяется в процессе 1–2, в котором давление прямо пропорционально объёму, совершая в нём работу $A_{12} = 200$ Дж. Затем газ расширяется в процессе 2–3 с постоянной теплоёмкостью, совершая работу $A_{23} = 1000$ Дж. Температуры в состояниях 1 и 3 равны (см. рисунок).

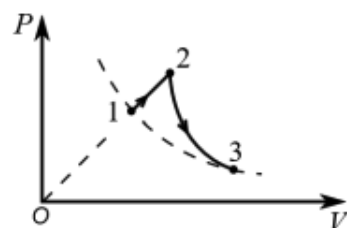


1) Найдите количество теплоты, подведённое к газу в процессе 2–3.

2) Найдите молярную теплоёмкость газа в процессе 2–3, выразив её через R .

$$Q_{23} = 1000 \text{ Дж}; \quad c = ? \quad (1)$$

ЗАДАЧА 22. («Физтех», 2018, 11) Газообразный гелий расширяется в процессе 1–2, в котором давление прямо пропорционально объёму (см. рис.). Затем газ расширяется в процессе 2–3 с постоянной теплоёмкостью. Работа, совершённая газом в процессе 1–2, в 6 раз меньше работы, совершённой газом в процессе 2–3. Температуры в состояниях 1 и 3 равны.

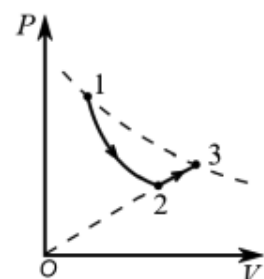


1) Найти отношение количества теплоты, полученной газом в процессе 1–2, к работе газа в процессе 1–2.

2) Найти молярную теплоёмкость газа в процессе 2–3.

$$\frac{Q_{12}}{A_{12}} = ? \quad c = ? \quad (1)$$

ЗАДАЧА 23. («Физтех», 2018, 11) Газообразный гелий расширяется в процессе 1–2 с постоянной теплоёмкостью. Затем газ расширяется в процессе 2–3, в котором давление прямо пропорционально объёму (см. рис.). Работа, совершённая газом в процессе 1–2, в 4 раза больше работы, совершённой газом в процессе 2–3. Температуры в состояниях 1 и 3 равны.

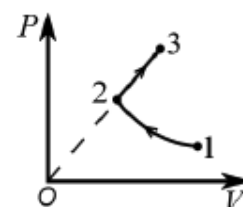


1) Найти отношение количества теплоты, полученной газом в процессе 2–3, к работе газа в процессе 2–3.

2) Найти молярную теплоёмкость газа в процессе 1–2.

$$\frac{Q_{23}}{A_{23}} = ? \quad c = ? \quad (1)$$

ЗАДАЧА 24. («Физтех», 2018, 11) Газообразный гелий сжимается в процессе 1–2 с постоянной молярной теплоёмкостью $C = 0,5R$. Затем газ расширяется в процессе 2–3, в котором давление прямо пропорционально объёму (см. рис.). В процессе 2–3 к газу подводят количество теплоты Q . Работа внешних сил над газом при сжатии и работа газа при расширении равны.

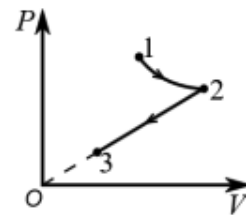


1) Найти работу A внешних сил над газом при сжатии.

2) Какое количество Q_{12} теплоты (с учётом знака) получил газ в процессе 1–2?

$$0 < \frac{Q}{A} = ? \quad c = ? \quad (1)$$

ЗАДАЧА 25. («Физтех», 2018, 11) Газообразный гелий расширяется в процессе 1–2 с постоянной молярной теплоёмкостью $C = R$. Затем газ сжимается в процессе 2–3, в котором давление прямо пропорционально объёму (см. рис.). В процессе 2–3 от газа отводят количество теплоты Q ($Q > 0$). Работа внешних сил над газом при сжатии и работа газа при расширении равны.



- 1) Найти работу A внешних сил над газом при сжатии.
- 2) Какое количество Q_{12} теплоты (с учётом знака) получил газ в процессе 1–2?

$$Q_{12} = \frac{5}{2} p_1 V_1 - p_2 V_2 \quad (p_2 V_2 = p_1 V_1)$$

ЗАДАЧА 26. («Физтех», 2016, 10) Один моль гелия находится при температуре $T = 273$ К. Далее газ расширяется так, что объём увеличивается на 3%, а давление уменьшается на 2%. Изменения параметров газа считать малыми.

- 1) Вычислите приращение ΔT температуры газа.
- 2) Какую работу ΔA совершил газ в процессе расширения?
- 3) Найдите молярную теплоёмкость C газа в этом процессе.

$$\Delta T = C \left(\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V} \right) = C \left(-0.02 + 0.03 \right) = 0.01 C$$

ЗАДАЧА 27. («Физтех», 2016, 10–11) Газообразный гелий нагревается (непрерывно повышается температура) от температуры T_0 в процессе, в котором молярная теплоёмкость газа зависит от температуры T по закону

$$C = R \frac{T}{T_0}$$

- 1) Найти температуру T_1 , при нагревании до которой газ совершил работу, равную нулю.
- 2) Найти температуру T_2 , при достижении которой газ занимал минимальный объём в процессе нагревания.

$$Q_L = \int_{T_0}^{T_1} C dT = \int_{T_0}^{T_1} R \frac{T}{T_0} dT = \frac{R}{2} \left(\frac{T_1^2}{T_0} - T_0 \right)$$

ЗАДАЧА 28. («Физтех», 2016, 10–11) Газообразный гелий нагревается (непрерывно повышается температура) от температуры T_0 в процессе, в котором молярная теплоёмкость газа зависит от температуры T по закону

$$C = \alpha R \frac{T}{T_0},$$

где α — неизвестная численная константа.

- 1) Найти α , если известно, что при нагревании до температуры $T_1 = 5T_0/4$ газ совершил работу, равную нулю.
- 2) Найти температуру T_2 , при достижении которой газ занимал минимальный объём в процессе нагревания.

$$Q_L = \int_{T_0}^{T_1} C dT = \int_{T_0}^{5T_0/4} \alpha R \frac{T}{T_0} dT = \frac{\alpha R}{2} \left(\frac{25T_0^2}{16} - T_0^2 \right)$$

ЗАДАЧА 29. (Всеросс., 2000, ОЭ, 10) В некотором процессе молярная теплоёмкость газообразного гелия возрастает прямо пропорционально температуре T :

$$C(T) = \frac{3RT}{4T_1},$$

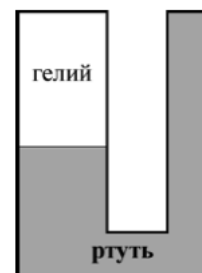
где T_1 — начальная температура газа, R — молярная газовая постоянная. Какую работу A совершат ν молей газа к тому моменту, когда его объём станет минимальным в указанном выше процессе?

$$\boxed{A = \frac{3}{8} \nu R T_1}$$

ЗАДАЧА 30. (МОШ, 2016, 11) Герметичный сосуд заполнен двухатомным идеальным газом. После значительного повышения температуры часть молекул диссоциировала на атомы, при этом удельная теплоёмкость всего газа возросла на 10%. Какая часть молекул диссоциировала? Теплоёмкость одного моля двухатомного идеального газа при неизменном объёме $C_V = 2,5R$.

$$\boxed{0,1}$$

ЗАДАЧА 31. (МОШ, 2014, 11) На рисунке изображены два вертикальных сообщающихся цилиндрических сосуда. Верх левого сосуда герметично запаян, и этот сосуд частично заполнен гелием. Правый сосуд до краёв наполнен ртутью так, что часть ртути находится в левом сосуде, и гелий заперт ею. Система помещена в вакуум. Гелию начинают медленно сообщать теплоту и продолжают нагревание до тех пор, пока ртуть остаётся в левом сосуде. Определите удельную теплоёмкость гелия в этом процессе.

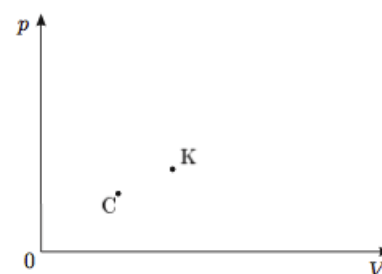


$$\boxed{C = \frac{5}{2} R}$$

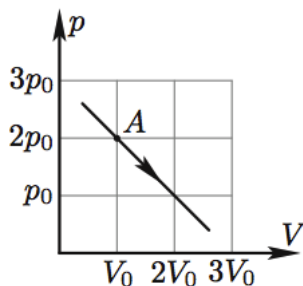
ЗАДАЧА 32. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Один моль гелия, занимавший объём $V = 10$ л, нагрели в процессе, в котором его молярная теплоёмкость равнялась $C_\mu = 2,3R$ ($R = 8,31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная). При этом давление гелия увеличилось на 0,2%. На сколько см³ изменился объём гелия в этом процессе?

$$\boxed{\Delta V = 0,8 \frac{d}{dV} \Delta V = \Delta V}$$

ЗАДАЧА 33. (Всеросс., 2013, РЭ, 11) Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли рукопись с pV -диаграммой, на которой был изображён циклический процесс в виде прямоугольного треугольника ACB . При этом угол C был прямым, а в точке K , лежащей на середине стороны AB , теплоёмкость многоатомного газа (CH_4) обращалась в нуль. Газ можно считать идеальным. От времени чернила выцвели, и на рисунке остались видны только координатные оси и точки C и K (см. рисунок). С помощью циркуля и линейки без делений восстановите положение треугольника ACB . Известно, что в точке A объём был меньше, чем в точке B .

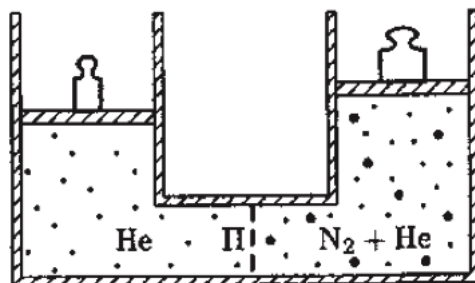


ЗАДАЧА 34. (Всеросс., 2004, финал, 10) С одним молем идеального одноатомного газа проводят процесс (рис.). Найдите теплоёмкость газа в точке А. В какой точке процесса теплоёмкость газа максимальна?



$$\left(\frac{0d\frac{z}{z}}{z_0} \frac{z}{z} \right) \text{эмьол в } \infty = \mathcal{C} ; \mathcal{H} \frac{z}{z} = V \mathcal{C}$$

ЗАДАЧА 35. (Всеросс., 2005, финал, 10) В сосуде находятся гелий He и азот N₂ в количестве ν_1 и ν_2 соответственно. Сосуд разделён на две части пористой перегородкой П (рис.), которая свободно пропускает гелий и не пропускает азот, причём изначально азот был только в правой части. Пренебрегая теплоёмкостью стенок сосуда и поршней, найдите теплоёмкость системы при нагревании в следующих условиях:



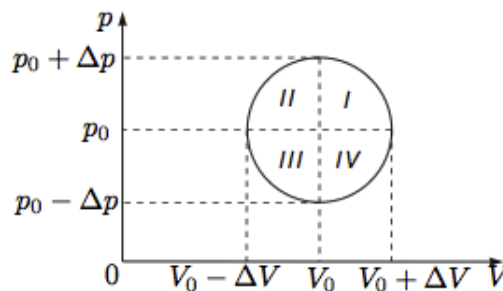
- 1) при закреплённых поршнях;
 - 2) при свободных поршнях, создающих постоянные давления;
 - 3) при свободном левом поршне, создающем постоянное давление, и закреплённом правом поршне.
- Универсальная газовая постоянная R известна.

$$\left(\frac{z_1 + \nu_1}{\mathcal{H}} \frac{z}{z} = \mathcal{C} ; \left(\frac{z_2}{\mathcal{H}} + \nu_2 \right) \frac{z}{z} = \mathcal{C} ; \left(\frac{z_3}{\mathcal{H}} + \nu_2 + \nu_1 \right) \frac{z}{z} = \mathcal{C} \right)$$

ЗАДАЧА 36. (Всеросс., 2014, финал, 10) При охлаждении одного моля гелия от начальной температуры T_0 до некоторой конечной температуры T_x в процессе с теплоёмкостью C , прямо пропорциональной температуре T , газ совершил работу, равную нулю. В самом начале процесса охлаждения давление газа изменялось прямо пропорционально его объёму. Найдите величину положительной работы газа в данном процессе и отношение T_x/T_0 .

$$\mathcal{A} + = \frac{1}{T} RT_0 ; \frac{1}{T} = + \frac{z}{z}$$

ЗАДАЧА 37. (Всеросс., 2016, финал, 11) Над моле́м идеального многоатомного газа проводят круговой процесс, который, будучи изображённым на p, V -диаграмме, при некотором масштабе имеет вид окружности. Центр окружности имеет координаты (p_0, V_0) , диаметр вдоль оси давлений равен $2\Delta p$, а диаметр вдоль оси объёмов — $2\Delta V$.



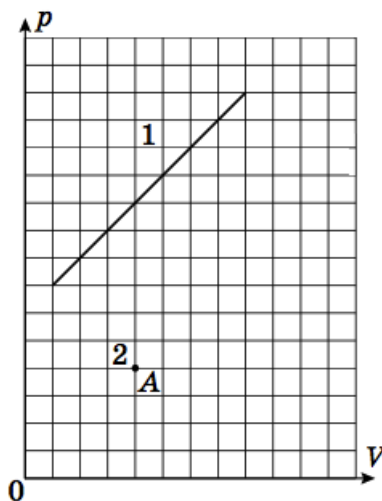
1) Найдите все пары диаметрально противоположных точек окружности, в которых теплоёмкости одинаковы. Вычислите эти теплоёмкости.

2) Сравните теплоёмкости двух произвольных диаметрально противоположных точек, лежащих во 2 и 4 квадрантах окружности (см. рисунок); другими словами, определите, в какой из этих точек теплоёмкость больше и почему.

Примечание. Считайте, что теплоёмкость газа при постоянном объёме не зависит от T .

$$C_p < C_v \left(2 + \frac{\left(\frac{\Delta V}{\Delta p} \right)^{-1}}{\gamma} + \gamma \right) = C_p; \quad C_p = C_v; \quad C_p = C_v \quad (1)$$

ЗАДАЧА 38. (Всеросс., 2018, финал, 11) В архиве лорда Кельвина нашли цилиндр с одним мо́лем идеального одноатомного газа. Лорд Кельвин проводил с ним два процесса и изобразил их на pV -диаграмме. Чернила, разумеется, выцвели. От первого процесса уцелела часть графика — отрезок прямой, а от графика второго процесса, как обычно, сохранилась единственная точка A . Из поясняющих записей следовало, что в этих процессах при равных температурах теплоёмкости совпадали. Восстановите график зависимости давления p от объёма V для второго процесса.



Отрезок из точки (1; 6) (2; 3) в точку (1; 7)