

## Брусок на доске

Перед решением задач стоит почитать статью [«Брусок на доске: как рисовать и решать»](#).

ЗАДАЧА 1. На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска массы  $M$ , а на доске покоится брусок массы  $m$ . Какую горизонтальную силу нужно приложить

- к доске;
- к бруску,

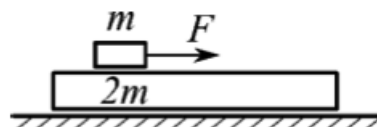
чтобы брусок соскользнул с неё? Коэффициент трения между бруском и доской равен  $\mu$ .

$$\left( \frac{M}{m} + 1 \right) \mu m g \leq F \leq (M + m) g \mu$$

ЗАДАЧА 2. («Физтех», 2015, 10, 11) На гладкой горизонтальной поверхности стола находится доска массой 5 кг. На доске находится брусок массой 0,2 кг. Коэффициент трения между бруском и доской равен 0,25. К бруску прикладывают горизонтальную силу 0,7 Н. Найдите ускорение доски. Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

$$2 \text{ м/с}^2$$

ЗАДАЧА 3. («Физтех», 2018, 9) На гладкой горизонтальной поверхности расположена доска массой  $2m$ , на которой лежит брусок массой  $m$ . Коэффициент трения между бруском и доской  $\mu$ .

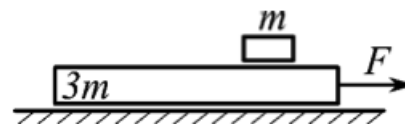


1) Какую минимальную горизонтальную силу  $F_{\text{мин}}$  надо приложить к бруску, чтобы он начал двигаться относительно доски?

2) За какое время брусок переместится относительно доски на расстояние  $L$ , если к нему приложить силу  $F > F_{\text{мин}}$ ?

$$F_{\text{мин}} = \frac{2}{3} \mu m g \quad \tau = \sqrt{\frac{4mL}{3(F - \frac{2}{3}\mu m g)}}$$

ЗАДАЧА 4. («Физтех», 2018, 9) На гладкой горизонтальной поверхности расположена доска массой  $3m$ , на которой лежит брусок массой  $m$ . Коэффициент трения между бруском и доской  $\mu$ .



1) Какую минимальную горизонтальную силу  $F_{\text{мин}}$  надо приложить к доске, чтобы относительно неё начал двигаться брусок?

2) За какое время брусок переместится относительно доски на расстояние  $L$ , если к доске приложить силу  $F > F_{\text{мин}}$ ?

$$F_{\text{мин}} = 4\mu m g \quad \tau = \sqrt{\frac{6mL}{F - 4\mu m g}}$$

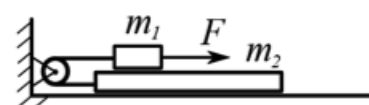
ЗАДАЧА 5. («Физтех», 2018, 10) Систему из бруска массой  $m_1 = t$  и доски массой  $m_2 = 2t$ , находящихся на горизонтальном столе, приводят в движение, прикладывая к доске горизонтальную силу  $F$  (см. рис.). Коэффициент трения между столом и доской и между горизонтальной поверхностью доски и бруском равен  $\mu$ . Массой горизонтально натянутой нити, массой блока и трением в его оси пренебречь.



- 1) Найти ускорение  $a_1$  доски, если бы не было трения.
- 2) Найти ускорение  $a_2$  доски, если есть трение и параметры  $F, t, \mu$  подобраны так, что есть движение.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3} \quad (1) \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3} \quad (2)$$

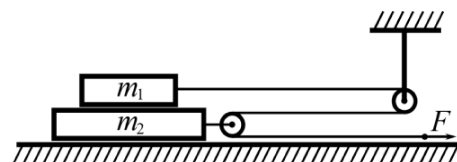
ЗАДАЧА 6. («Физтех», 2018, 10) Систему из бруска массой  $m_1 = 3t$  и доски массой  $m_2 = t$ , находящихся на горизонтальном столе, приводят в движение, прикладывая к бруску горизонтальную силу  $F$  (см. рис.). Коэффициент трения между столом и доской и между горизонтальной поверхностью доски и бруском равен  $\mu$ . Массой горизонтально натянутой нити, массой блока и трением в его оси пренебречь.



- 1) Найти ускорение  $a_1$  бруска, если бы не было трения.
- 2) Найти ускорение  $a_2$  бруска, если есть трение и параметры  $F, t, \mu$  подобраны так, что есть движение.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3} \quad (1) \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3} \quad (2)$$

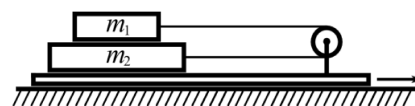
ЗАДАЧА 7. («Физтех», 2022, 9) На горизонтальном столе находятся бруски, соединённые нитью с системой блоков (см. рис.). Массы брусков  $m_1 = 2t, m_2 = 3t$ . Коэффициент трения скольжения нижнего бруска по столу и верхнего бруска по нижнему равен  $\mu$ . Массы нити и блоков, а также трение в осях блоков пренебрежимо малы.



1. Найдите величину  $F_0$  горизонтальной силы, которую следует приложить к свободному концу нити, чтобы нижний брусок скользил по столу, а сила трения, действующая на верхний брусок, была равна нулю.
2. Найдите величину  $F$  минимальной силы, при которой нижний брусок скользит по столу, а верхний брусок движется влево относительно нижнего бруска.

$$F_0 = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 2F_0 = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} < F \quad (1) \quad F_0 = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 2F_0 = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} < F \quad (2)$$

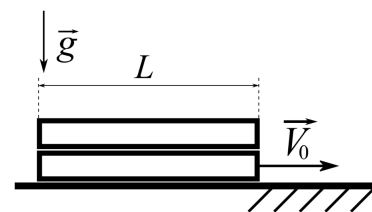
ЗАДАЧА 8. («Физтех», 2022, 9) На горизонтальном столе находится доска, на которой укреплен неподвижный блок, а также бруски, соединенные нитью. Массы брусков  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 2m$ . Коэффициент трения скольжения верхнего бруска по нижнему равен  $\mu$ , трение между доской и нижним бруском отсутствует. Доску приводят в движение с постоянным ускорением, направленным вправо. Массой нити и блока, а также трением в оси блока можно пренебречь.



1. Найдите максимальное ускорение  $a_0$  доски, при котором бруски не будут проскальзывать относительно друг друга.
2. Найдите силу  $T$  натяжения нити, если доска движется с ускорением  $a > a_0$ .

$$u \left( \frac{\varepsilon}{b\pi + v^2} \right) = J (z : b\pi z = \frac{v u - z u}{b + u \pi z} = 0v \quad (1)$$

ЗАДАЧА 9. («Физтех», 2025, отбор, 10) Две одинаковые однородные доски длиной  $L = 1,5$  [м], лежащие одна на другой (см. рис.), движутся по горизонтальной плоскости со скоростью  $1,5$  [м/с] и въезжают с гладкой части на шероховатую часть этой плоскости. Коэффициент трения скольжения нижней доски по горизонтальной плоскости равен  $0,3$ , коэффициент трения скольжения верхней доски по нижней равен  $0,1$ .



Найдите модуль скорости досок в момент времени, когда начнется относительное движение досок. Ускорение свободного падения  $10$  [м/с<sup>2</sup>]. Доски движутся поступательно. Ответ приведите в [см/с] и округлите до целого числа.

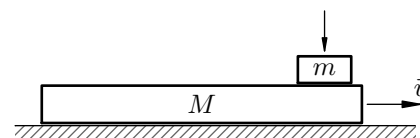
$$\frac{v\pi}{T b^2 z} - \frac{0}{z} \Lambda = \Lambda$$

ЗАДАЧА 10. («Физтех», 2025, отбор, 10) На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска, на которой покоится брусок. К доске прикладывают горизонтальную силу  $F = 2 \cdot F_0$ , где  $F_0$  — минимальная сила, которую следует приложить к доске, чтобы началось относительное движение бруска и доски. Доска и брусок движутся поступательно. Ускорение бруска относительно доски больше ускорения бруска относительно плоскости в 3 раза.

Найдите отношение массы доски к массе бруска. Ответ приведите с точностью до десятых.

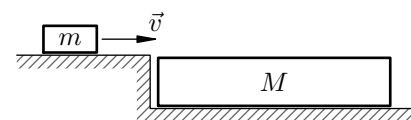
$$\varrho'0$$

ЗАДАЧА 11. (МФТИ, 1993) На длинную доску массой  $M$ , скользящую по гладкой горизонтальной поверхности стола со скоростью  $v$ , кладут с нулевой скоростью относительно стола шайбу массы  $m$  (см. рисунок). Какое расстояние пройдет шайба по доске к моменту, когда её скорость относительно доски станет равной нулю? Коэффициент трения между шайбой и доской равен  $\mu$ .



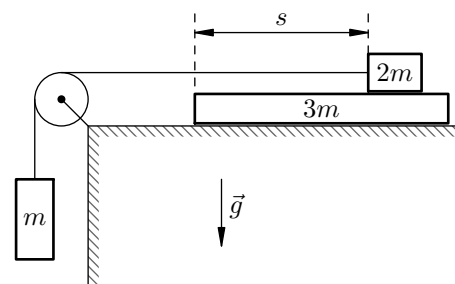
$$\frac{b(u + v)\pi z}{z^2 v} = s$$

ЗАДАЧА 12. (МФТИ, 1993) На горизонтальной гладкой поверхности стола покоится доска массой  $M$  (см. рисунок). На доску со скоростью  $v$  въезжает шайба массы  $m$ . Какой должна быть длина доски, чтобы шайба не соскользнула с неё? Коэффициент трения скольжения между шайбой и доской равен  $\mu$ , размер шайбы мал по сравнению с длиной доски.



$$\frac{6(u+V)nc}{z^a N} < T$$

ЗАДАЧА 13. (МФТИ, 2001) Систему из груза массой  $m$ , бруска массой  $2m$  и доски массой  $3m$  удерживают в покое (см. рисунок). Брусок находится на расстоянии  $s = 49$  см от края доски. Систему отпускают, и брусок движется по доске, а доска — по горизонтальной поверхности стола. Коэффициент трения скольжения между бруском и доской  $\mu_1 = 0,35$ , а между доской и столом  $\mu_2 = 0,10$ .



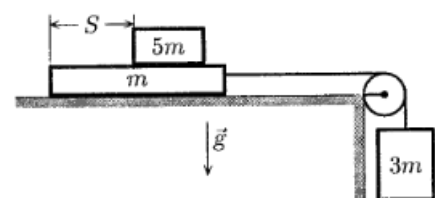
1) Определить ускорение бруска относительно стола при движении бруска по доске.

2) Через какое время брусок достигнет края доски?

Считать, что за время опыта доска не достигает блока. Массу нити, блока и трение в оси блока не учитывать.

$$s \approx \frac{6(\mu_1 g + \mu_2 g - 1)}{s g} \Lambda = 7 (z : z^2 / m \Gamma \approx 6 \frac{\epsilon}{1 n z - 1} = 1 v (\Gamma$$

ЗАДАЧА 14. (МФТИ, 2001) Систему из доски массой  $m$ , бруска массой  $5m$  и груза массой  $3m$  удерживают в покое (см. рисунок). Затем систему отпускают, и доска движется по горизонтальной поверхности стола, а брусок движется по доске. Через время  $t = 1,4$  с брусок достигает края доски, а доска ещё не доходит до блока. Коэффициент трения скольжения бруска о доску  $\mu_1 = 0,1$ , а доски о стол  $\mu_2 = 0,3$ .



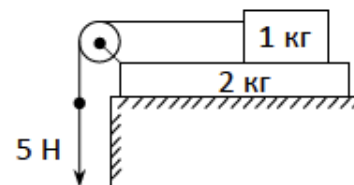
1) Определить ускорение бруска относительно стола при движении бруска по доске.

2) На каком расстоянии от края доски находился брусок до начала движения?

Массу нити, блока и трение в оси блока не учитывать.

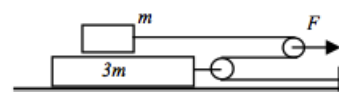
$$m_0 g L \approx z \mu (z n z - 1 n g - 1) \frac{g}{\epsilon} = T (z : z^2 / m \Gamma = 6 1 n = v (\Gamma$$

ЗАДАЧА 15. (Всеросс., 2017, МЭ, 10) На столе лежит доска массой  $m_1 = 2$  кг, а на доске находится брусок массой  $m_2 = 1$  кг. К бруску привязана лёгкая нить, второй конец которой перекинут через идеальный блок, закреплённый на краю доски. Коэффициенты трения между доской и столом и между бруском и доской одинаковы и равны  $\mu = 0,1$ . Участок нити между бруском и блоком горизонтален. С какими по модулю ускорениями начнут двигаться брусок и доска, если к вертикальному участку нити приложить направленную вниз силу  $F = 5$  Н? Ускорение свободного падения можно считать равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



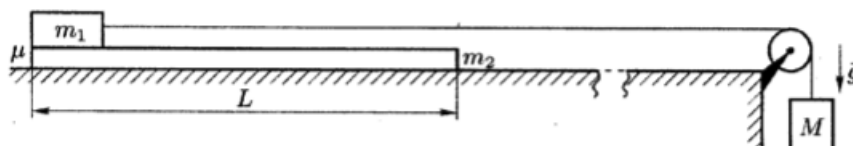
$$a_1 = \frac{F - \mu m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{5 - 0,1 \cdot 1 \cdot 10}{2 + 1} = \frac{4}{3} \text{ м/с}^2$$

ЗАДАЧА 16. (Всеросс., 2018, МЭ, 11) Систему грузов, имеющих массы  $m$  и  $3m$ , тянут с помощью подвижного блока по гладкой горизонтальной поверхности. При каких значениях силы  $F$  грузы не будут проскальзывать друг по другу, если коэффициент трения между ними  $\mu$ ? Массами блоков и нити можно пренебречь. Нить нерастяжима.



$$F \geq 3\mu mg$$

ЗАДАЧА 17. (Всеросс., 2010, ЗЭ, 10) На длинном гладком горизонтальном столе лежит доска массы  $m_2$  и длины  $L$ , на левом конце которой находится груз массы  $m_1$ . Коэффициент трения между грузом и доской равен  $\mu$ . Трение между доской и столом отсутствует. Груз  $m_1$  связан с грузом  $M$  длинной невесомой нитью, перекинутой через невесомый блок (рис.). Система начинает двигаться из состояния покоя.



- 1) При каких значениях коэффициента трения  $\mu$  груз  $m_1$  и доска  $m_2$  будут двигаться как единое целое (без проскальзывания)?
- 2) Найдите минимальное значение коэффициента трения  $\mu_{\min}$ , при котором возможно движение без проскальзывания.
- 3) Пусть  $\mu = \mu_{\min}/2$ . В этом случае груз  $m_1$  и доска  $m_2$  будут двигаться с разными ускорениями. Через какое время  $t$  после начала движения груз соскользнёт с доски?

Считайте, что  $m_1 = M = 1$  кг,  $m_2 = 2$  кг. Длину доски  $L$  примите равной 1 м. Известно, что длина груза много меньше  $L$ . Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} \left( 1 - \frac{\mu m_1 + M}{\mu m_1 + M + m_2} \right) = \sqrt{\frac{2L}{g}} \left( 1 - \frac{1 + 1}{1 + 1 + 2} \right) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2L}{g}}$$



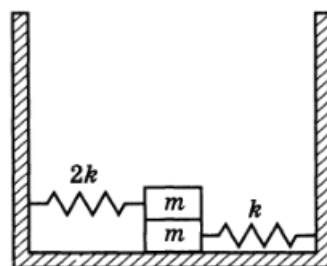
ЗАДАЧА 22. («Росатом», 2015, 9, 10) На горизонтальной доске лежит мел. Коэффициент трения между доской и мелом  $k = 0,3$ . Доске резко сообщают горизонтальную скорость  $v_0 = 5$  м/с, а через время  $\tau = 1$  с резко останавливают. Найти длину следа мела на доске. Считать, что при скольжении по доске мел оставляет след; если мел движется по уже оставленному следу, длина следа не увеличивается.

$$m \cdot g \cdot \tau = \frac{v_0}{k} - L \Rightarrow L = \frac{v_0 \tau}{k} = 1,5 \text{ м}$$

ЗАДАЧА 23. (Всеросс., 2004, ОЭ, 9) С противоположных концов однородного изначально неподвижного бруска длиной  $L$ , лежащего на гладкой горизонтальной поверхности, навстречу друг другу пустили две маленькие шайбы. Массы шайб  $m_1 = m$  и  $m_2 = 2m$ , их начальные скорости  $v_1 = v_0$  и  $v_2 = 2v_0$ , коэффициенты трения скольжения между бруском и шайбами одинаковы. Шайбы столкнулись на середине бруска через время  $\tau = 0,4L/v_0$ , имея при этом ненулевые скорости относительно бруска. Найдите массу бруска  $M$  и коэффициент трения скольжения  $k$  шайб по бруску. Ускорение свободного падения равно  $g$ . Будет ли задача иметь решение, если  $\tau = 0,2L/v_0$ ?  $\tau = L/v_0$ ? Ответ обоснуйте.

$$L \text{ и } \tau \text{ удовлетворяют } 0 < \tau < L/v_0 \text{ и } 0 < \tau < L/v_0 \text{ и при } \tau = L/v_0 \text{ и } \tau = 0,2L/v_0 \text{ не имеет решения}$$

ЗАДАЧА 24. (Всеросс., 1992, ОЭ, 10) Определите максимальную амплитуду гармонических колебаний системы из двух брусков и двух невесомых пружин, изображённой на рисунке. Жёсткость правой пружины  $k = 10$  Н/м, жёсткость левой  $2k = 20$  Н/м, масса каждого бруска  $m = 100$  г, коэффициент трения между брусками  $\mu = 0,5$ . В положении равновесия правая пружина растянута на длину  $\Delta x_{01} = 2$  см. Трения между нижним бруском и опорой нет.

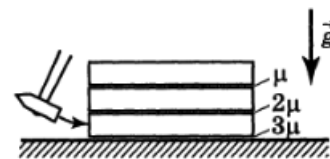


$$m \cdot g = (10x_{\text{равн}} - \frac{v_0^2}{2g}) \cdot \tau = V$$

ЗАДАЧА 25. (Всеросс., 1996, ОЭ, 10) На горизонтальной поверхности лежит длинная доска, а на ней — брусок такой же массы. Коэффициент трения скольжения между бруском и доской, равный  $\mu_1$ , в три раза превышает коэффициент трения  $\mu_2$  между доской и горизонтальной плоскостью. Бруску сообщили вдоль доски горизонтальную скорость  $v_0$ . Известно время  $\tau$ , за которое движение доски относительно поверхности прекратится. Найдите  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в предположении, что брусок не соскальзывает с доски.

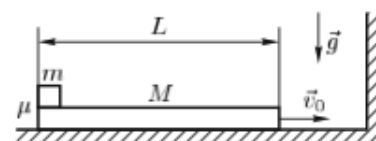
$$\frac{v_0 \tau}{2} = \tau^2 \cdot \frac{v_0 \tau}{2} = \tau^2$$

Задача 26. (Всеросс., 1995, ОЭ, 10) На столе один на другом лежат три одинаковых длинных бруска. Их поверхности обработаны так, что коэффициенты трения скольжения между ними равны соответственно  $\mu$ ,  $2\mu$  и  $3\mu$  (рис.). По нижнему бруску ударяют молотком. Направление удара горизонтально. Найдите время, через которое система вернётся в состояние покоя. Известно, что после удара по верхнему бруску, сообщившему ему ту же скорость  $v_0$ , что и скорость нижнего бруска в результате удара по нему, система вернулась в состояние покоя через время  $t_0 = 3$  с.



$$\Rightarrow t_0 = \frac{9}{v_0} = 3$$

Задача 27. (Всеросс., 2010, РЭ, 10) Доска массы  $M$  и длины  $L$  скользит с некоторой скоростью  $v_0$  по гладкой горизонтальной поверхности. На левом краю доски лежит кубик массы  $m$ . Коэффициент трения скольжения между кубиком и доской равен  $\mu$ .



Доска испытывает абсолютно упругий удар о вертикальную стенку (см. рисунок). При какой максимальной скорости доски  $v_0 = v_{\max}$  кубик с неё не упадёт? Размерами кубика по сравнению с  $L$  пренебречь. В процессе всего движения кубик не опрокидывается.

$$\left(\frac{L}{u} + 1\right) \sqrt{6\mu \frac{g}{L}} = \text{const}$$