

Баллистика. Векторы

Вектор скорости \vec{v} и вектор перемещения \vec{s} тела, движущегося в поле силы тяжести, зависят от времени следующим образом:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t, \quad (1)$$

$$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}. \quad (2)$$

В некоторых задачах имеет смысл не торопиться проектировать уравнения (1) и (2) на координатные оси (как это обычно делается), а вместо этого нарисовать соответствующие векторы и поизучать возникающие геометрические ситуации.

ЗАДАЧА 1. *Треугольник скоростей.* В силу формулы (1) векторы \vec{v} , \vec{v}_0 и $\vec{g}t$ связаны правилом треугольника сложения векторов. Положив $\vec{v}_0 = \vec{OA}$ и $\vec{v} = \vec{OB}$, нарисуйте векторный треугольник OAB (треугольник скоростей). Как меняется треугольник скоростей с течением времени?

Точка B с течением времени движется по прямой линии.

[Овчинкин] → 1.9.

ЗАДАЧА 2. (*МОШ, 2018, 9*) Со скалы, возвышающейся над морем на высоту $h = 25$ м, бросили камень. Найдите время его полёта, если известно, что непосредственно перед падением в воду камень имел скорость $v = 30$ м/с, направленную под углом $\beta = 120^\circ$ к начальной скорости. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

$t = 4,4$ с

ЗАДАЧА 3. (*Всеросс., 2012, РЭ, 10*) Камень бросили под углом к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с. Через время τ он достиг максимальной высоты, удалившись по горизонтали на расстояние $L = 30$ м от места броска. Найдите время τ . Примите ускорение свободного падения равным $g = 10$ м/с².

$$\tau = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 4g^2 L^2}}{2g^2 L}$$

ЗАДАЧА 4. (*МОШ, 2017, 11*) Петя бросил мячик с балкона с начальной скоростью V стоящему на земле Васе. Через время $t_1 = 2,21$ с Вася поймал мячик, заметив, что в конце полёта скорость мячика была направлена перпендикулярно его начальной скорости в момент броска, совершённого Петей. Затем Вася сделал несколько шагов, остановился и бросил мячик обратно на балкон Пете, сообщив мячику такую же по модулю начальную скорость V . Петя поймал мячик через время $t_2 = 1,72$ с, заметив, что конечная скорость мячика также направлена перпендикулярно начальной скорости мячика в момент броска, совершённого Васей. Определите разницу высот H между кистями рук Пети и Васи, а также определите, чему равен модуль скорости V . Сопротивлением воздуха можно пренебречь, модуль ускорения свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с².

$$H = \frac{g}{2} (t_1^2 - t_2^2) \approx 1,4 \text{ м}$$

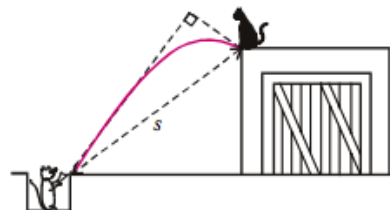
ЗАДАЧА 5. С помощью формул (1) и (2) покажите, что вектор \vec{s}/t равен полусумме векторов \vec{v}_0 и \vec{v} . (Таким образом, вектор \vec{s}/t является медианой \overline{OM} треугольника скоростей OAB .)

ЗАДАЧА 6. (Всеросс., 2012, РЭ, 9) Скорость камня v_0 , брошенного под углом $\varphi = 60^\circ$ к горизонту, уменьшилась вдвое за $\Delta t = 1$ с. Найдите модуль перемещения S , которое за это время совершил камень.

Примечание. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с².

$$v_0 \sin \varphi \approx \frac{v_0}{2} \Rightarrow \frac{v_0}{2} \Delta t = S$$

ЗАДАЧА 7. (Всеросс., 1999, финал, 9) Кот Леопольд сидел у края крыши. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, упал у ног кота (см. рисунок) через время $\tau = 1$ с. На каком расстоянии s от мышей находился кот Леопольд, если известно, что векторы скоростей камня в момент выстрела и в момент падения были взаимно перпендикулярны?



$$v_0 \tau = s$$

ЗАДАЧА 8. Камень, брошенный с поверхности земли со скоростью v_0 под некоторым углом к горизонту, упал на землю спустя время t .

- Найдите дальность полёта l .
- Какова максимальная дальность полёта камня, брошенного с данной скоростью?

$$\frac{v_0^2}{g} = \frac{l}{\sin 2\alpha} \Rightarrow l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

ЗАДАЧА 9. Вернёмся к треугольнику скоростей OAB ; точка M — середина стороны AB . Опустим высоту OH . Изображением каких физических величин служат отрезки OH и HM ?

$$OH = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \quad HM = \frac{v_0^2 \cos 2\alpha}{2g}$$

ЗАДАЧА 10. Камень брошен под углом к горизонту со скоростью v_0 . Найдите скорость камня в тот момент, когда он находится на высоте h .

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

ЗАДАЧА 11. (МОШ, 2014, 9–11) Под углом 60 градусов к горизонту брошено тело с начальной скоростью 20 м/с. Ускорение свободного падения составляет 10 м/с². Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

А) Через какое минимальное время тело будет двигаться под углом 30 градусов к горизонту? Ответ представьте в секундах и округлите до второй значащей цифры.

В) На какой высоте тело будет двигаться под углом 30 градусов к горизонту? Ответ представьте в метрах и округлите до десятых.

$$t = 1.73; \quad h = 13.3$$

ЗАДАЧА 12. («Росатом», 2011, 11) Тело бросили под углом к горизонту. Известно, что время полёта тела равно τ , а отношение максимальной и минимальной скоростей тела в процессе движения $v_{\max}/v_{\min} = k$. Определить дальность полёта. Сопротивлением воздуха пренебречь.

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

ЗАДАЧА 13. (МФТИ, 1982) Мяч, брошенный одним игроком другому под углом к горизонту со скоростью $v_0 = 20$ м/с, достиг высшей точки траектории через секунду. На каком расстоянии друг от друга находились игроки? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения принять равным 10 м/с².

$$v_0 \sin \alpha \approx \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

ЗАДАЧА 14. (МФТИ, 1982) Баскетболист бросает мяч в кольцо. Скорость мяча после броска $v_0 = 8$ м/с и составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом. С какой скоростью мяч попал в кольцо, если он долетел до него за секунду? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения принять равным 10 м/с².

$$v_0 \cos \alpha \approx \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow v = 10 \text{ м/с}$$

ЗАДАЧА 15. (Всеросс., 2015, РЭ, 9) Величина скорости камня, брошенного с горизонтальной плоскости под углом к горизонту, через время $\tau = 0,5$ с после броска составляла $\alpha = 80\%$ от величины начальной скорости, а ещё через τ соответственно $\beta = 70\%$.

- 1) Найдите продолжительность T полёта камня.
- 2) На каком расстоянии S от места броска упал камень?

Ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с², сопротивлением воздуха можно пренебречь.

$$v_0 \cos \alpha = v_0 \cos \beta \Rightarrow \alpha = 80^\circ, \beta = 70^\circ$$

ЗАДАЧА 16. Школьник Вася, находясь на улице и пытаясь привлечь внимание одноклассницы Маши, бросает ей в окно маленький камешек. Окно Маши расположено на высоте h над землёй, а скорость броска Васи равна v_0 .

а) Найдите расстояние s между Васей и Машиним окном, если камешек летел в течение времени t .

б) Докажите неравенство $v_0^2 \geq g(s + h)$.

в) При каком максимальном расстоянии до окна Вася сможет попасть в него камешком?

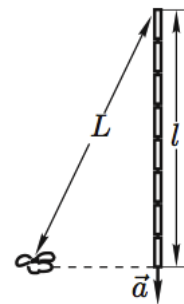
г) Покажите, что максимум величины s достигается в том и только в том случае, если конечная скорость камешка (в момент попадания в окно) перпендикулярна его начальной скорости.

$$v_0 \sin \alpha = v_0 \cos \beta \Rightarrow \alpha = 45^\circ, \beta = 45^\circ$$

ЗАДАЧА 17. Мальчик бросает с балкона (точка A) мяч со скоростью v_0 под некоторым углом к горизонту. Спустя время t мяч падает на землю (точка B). Найдите расстояние AB . Балкон расположен на высоте h над землёй.

$$\frac{v_0^2}{2g} - v_0 \sin \alpha + h = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

ЗАДАЧА 18. (Всеросс., 2007, финал, 9) Пассажирский поезд длиной l стоял на первом пути. В последнем вагоне сидел Дядя Фёдор (герой книги Э. Успенского «Каникулы в Простоквашино») и ожидал письмо, которое ему должен был передать Шарик от кота Матроскина. В тот момент, когда поезд тронулся, на привокзальной площади, как раз напротив первого вагона, появился Шарик (рис.). Он определил, что расстояние до последнего вагона равно L . С какой минимальной скоростью v_0 должен бежать пёс, чтобы передать письмо, если поезд движется с постоянным ускорением \bar{a} ?

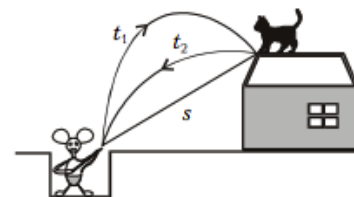


$$(1 - T)v^{\wedge} = 0a$$

ЗАДАЧА 19. (Всеросс., 2004, финал, 9) При осаде древней крепости осаждённые вели стрельбу по наступающему противнику с помощью катапульта из-за крепостной стены высотой $h = 20,4$ м. Начальная скорость снарядов $v_0 = 25$ м/с. На каком максимальном расстоянии l_{\max} от стены находились цели, которых могли достигать снаряды катапульта? Сравните это расстояние с максимальной дальностью L_{\max} снаряда катапульта. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

$$l_{\max} \approx \frac{v_0^2}{g} = \frac{25^2}{9.8} \approx 63.7 \text{ м}$$

ЗАДАЧА 20. (Всеросс., 2000, финал, 9) Кот Леопольд стоял у края крыши сарая. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, через $t_1 = 1,2$ с упруго отразился от наклонного ската крыши сарая у самых лап кота и через $t_2 = 1,0$ с попал в лапу стрелявшего мышонка (см. рисунок). На каком расстоянии s от мышей находился кот Леопольд?

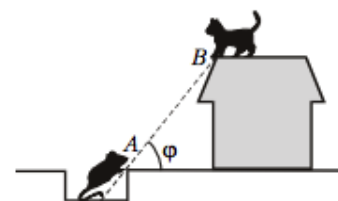


$$v_1 t_1 \sin \alpha = s$$

ЗАДАЧА 21. (МОШ, 2007, 10) Школьник бросает мяч в баскетбольное кольцо. Чтобы попасть в цель при броске под углом $\alpha_1 = 30^\circ$ к горизонту, он должен сообщить мячу начальную скорость $v_1 = v$, а при броске под углом $\alpha_2 = 60^\circ$ — начальную скорость $v_2 = v/2$. На какой высоте h над точкой бросания расположено баскетбольное кольцо? Под каким углом β к горизонту наклонён отрезок, соединяющий точку бросания и кольцо? Бросок каждый раз производится из одной и той же точки. Сопротивлением воздуха можно пренебречь, ускорение свободного падения равно g .

$$h = \frac{v_1^2 \sin^2 \alpha_1}{2g} = \frac{v^2 \sin^2 30^\circ}{2g} = \frac{v^2}{8g}$$

ЗАДАЧА 22. (Всеросс., 2002, финал, 10) Кот Леопольд сидел на самом краю крыши сарая. Два озорных мышонка решили выстрелить в него из рогатки, но кот заметил их и решил отстреливаться. . . Камни из рогаток мышат и кота вылетели одновременно и столкнулись в середине отрезка AB (см. рисунок). Найдите высоту H сарая и отношение пути, пройденного камнем кота Леопольда, к пути, пройденному камнем мышат, если известно, что $\varphi = 30^\circ$, скорость камня, вылетевшего из рогатки мышат, $v_0 = 7$ м/с, а кот выстрелил горизонтально.



$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} = \frac{7^2 \sin^2 30^\circ}{2 \cdot 9.8} = 0.625 \text{ м}$$

ЗАДАЧА 23. («Физтех», 2011, 11) Камень брошен со скоростью $v_0 = 17$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. С какой угловой скоростью поворачивается вектор скорости камня через $t = 1$ с после броска? Принять $g = 10$ м/с², сопротивление воздуха не учитывать.

$$\omega / \text{rad s}^{-1} \approx \frac{v_0 \sin 2\alpha}{v_0 \cos^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \tan^3 \alpha = 2 \tan^3 60^\circ = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \approx 10.4$$

ЗАДАЧА 24. («Росатом», 2020, 9) С высокой башни под некоторым углом к горизонту бросили тело. Известны положения тела через интервалы времени τ и 2τ после броска (см. рисунок; эти положения отмечены точками B и C). Известно также положение точки, откуда бросили тело (точка A). С помощью построения найти положение тела спустя интервал времени 3τ после броска. Считать, что в этот момент тело ещё не упало на землю. Построение обосновать.

