

## Баллистика. Векторы

Вектор скорости  $\vec{v}$  и вектор перемещения  $\vec{s}$  тела, движущегося в поле силы тяжести, зависят от времени следующим образом:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t, \quad (1)$$

$$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}. \quad (2)$$

В некоторых задачах имеет смысл не торопиться проектировать уравнения (1) и (2) на координатные оси (как это обычно делается), а вместо этого нарисовать соответствующие векторы и поизучать возникающие геометрические ситуации.

**ЗАДАЧА 1.** *Треугольник скоростей.* В силу формулы (1) векторы  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}_0$  и  $\vec{g}t$  связаны правилом треугольника сложения векторов. Положив  $\vec{v}_0 = \vec{OA}$  и  $\vec{v} = \vec{OB}$ , нарисуйте векторный треугольник  $OAB$  (треугольник скоростей). Как меняется треугольник скоростей с течением времени?

Точка  $B$  с течением времени движется от точки  $A$  вертикально вниз

[Овчинкин] → 1.9.

**ЗАДАЧА 2.** (*МОШ, 2018, 9*) Со скалы, возвышающейся над морем на высоту  $h = 25$  м, бросили камень. Найдите время его полёта, если известно, что непосредственно перед падением в воду камень имел скорость  $v = 30$  м/с, направленную под углом  $\beta = 120^\circ$  к начальной скорости. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

$t = 4,4$  с

**ЗАДАЧА 3.** (*Всеросс., 2012, РЭ, 10*) Камень бросили под углом к горизонту с начальной скоростью  $v_0 = 25$  м/с. Через время  $\tau$  он достиг максимальной высоты, удалившись по горизонтали на расстояние  $L = 30$  м от места броска. Найдите время  $\tau$ . Примите ускорение свободного падения равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

$$\tau = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 4g^2 L^2}}{2g^2} \quad ; \quad L = 30 \text{ м}, \quad v_0 = 25 \text{ м/с}, \quad g = 10 \text{ м/с}^2$$

**ЗАДАЧА 4.** (*МОШ, 2017, 11*) Петя бросил мячик с балкона с начальной скоростью  $V$  стоящему на земле Васе. Через время  $t_1 = 2,21$  с Вася поймал мячик, заметив, что в конце полёта скорость мячика была направлена перпендикулярно его начальной скорости в момент броска, совершённого Петей. Затем Вася сделал несколько шагов, остановился и бросил мячик обратно на балкон Пете, сообщив мячику такую же по модулю начальную скорость  $V$ . Петя поймал мячик через время  $t_2 = 1,72$  с, заметив, что конечная скорость мячика также направлена перпендикулярно начальной скорости мячика в момент броска, совершённого Васей. Определите разницу высот  $H$  между кистями рук Пети и Васи, а также определите, чему равен модуль скорости  $V$ . Сопротивлением воздуха можно пренебречь, модуль ускорения свободного падения считайте равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

$$H = \frac{g}{2} (t_1^2 - t_2^2) \approx 4,8 \text{ м}; \quad V = \sqrt{\frac{g}{2} (t_1^2 + t_2^2)} \approx 14 \text{ м/с}$$

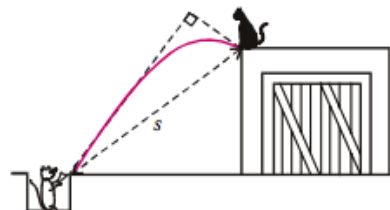
ЗАДАЧА 5. С помощью формул (1) и (2) покажите, что вектор  $\vec{s}/t$  равен полусумме векторов  $\vec{v}_0$  и  $\vec{v}$ . (Таким образом, вектор  $\vec{s}/t$  является медианой  $\overline{OM}$  треугольника скоростей  $OAB$ .)

ЗАДАЧА 6. (Всеросс., 2012, РЭ, 9) Скорость камня  $v_0$ , брошенного под углом  $\varphi = 60^\circ$  к горизонту, уменьшилась вдвое за  $\Delta t = 1$  с. Найдите модуль перемещения  $S$ , которое за это время совершил камень.

Примечание. Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

$$v_0 \sin \varphi \Delta t \approx \frac{v_0 \sin \varphi}{2} \Delta t \Rightarrow \frac{v_0 \sin \varphi}{2} \Delta t = S$$

ЗАДАЧА 7. (Всеросс., 1999, финал, 9) Кот Леопольд сидел у края крыши. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, упал у ног кота (см. рисунок) через время  $\tau = 1$  с. На каком расстоянии  $s$  от мышей находился кот Леопольд, если известно, что векторы скоростей камня в момент выстрела и в момент падения были взаимно перпендикулярны?



$$\tau \perp \vec{v} \Rightarrow s = \tau v_0 \cos \varphi$$

ЗАДАЧА 8. Камень, брошенный с поверхности земли со скоростью  $v_0$  под некоторым углом к горизонту, упал на землю спустя время  $t$ .

- а) Найдите дальность полёта  $l$ .
- б) Какова максимальная дальность полёта камня, брошенного с данной скоростью?

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g} \Rightarrow \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g} = l \Rightarrow l = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g}$$

ЗАДАЧА 9. Вернёмся к треугольнику скоростей  $OAB$ ; точка  $M$  — середина стороны  $AB$ . Опустим высоту  $OH$ . Изображением каких физических величин служат отрезки  $OH$  и  $HM$ ?

$$OH = \frac{v_0 \sin \varphi}{2}, HM = \frac{v_0 \cos \varphi}{2}$$

ЗАДАЧА 10. Камень брошен под углом к горизонту со скоростью  $v_0$ . Найдите скорость камня в тот момент, когда он находится на высоте  $h$ .

$$v^2 \cos^2 \varphi - \frac{g^2 h^2}{v_0^2} = 0 \Rightarrow v \cos \varphi = \frac{g h}{v_0}$$

ЗАДАЧА 11. (МОШ, 2014, 9–11) Под углом  $60$  градусов к горизонту брошено тело с начальной скоростью  $20$  м/с. Ускорение свободного падения составляет  $10$  м/с<sup>2</sup>. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

А) Через какое минимальное время тело будет двигаться под углом  $30$  градусов к горизонту? Ответ представьте в секундах и округлите до второй значащей цифры.

В) На какой высоте тело будет двигаться под углом  $30$  градусов к горизонту? Ответ представьте в метрах и округлите до десятых.

$$v_0 \sin \varphi = v_0 \cos \varphi \Rightarrow \tan \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

ЗАДАЧА 12. («Росатом», 2011, 11) Тело бросили под углом к горизонту. Известно, что время полёта тела равно  $\tau$ , а отношение максимальной и минимальной скоростей тела в процессе движения  $v_{\max}/v_{\min} = k$ . Определить дальность полёта. Сопротивлением воздуха пренебречь.

$$\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{1}{k^2} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}$$

ЗАДАЧА 13. (МФТИ, 1982) Мяч, брошенный одним игроком другому под углом к горизонту со скоростью  $v_0 = 20$  м/с, достиг высшей точки траектории через секунду. На каком расстоянии друг от друга находились игроки? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения принять равным  $10$  м/с<sup>2</sup>.

$$v_0 \sin \alpha \approx \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

ЗАДАЧА 14. (МФТИ, 1982) Баскетболист бросает мяч в кольцо. Скорость мяча после броска  $v_0 = 8$  м/с и составляет угол  $\alpha = 60^\circ$  с горизонтом. С какой скоростью мяч попал в кольцо, если он долетел до него за секунду? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения принять равным  $10$  м/с<sup>2</sup>.

$$v_0 \cos \alpha \approx \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow v = 8 \cos 60^\circ = 4 \text{ м/с}$$

ЗАДАЧА 15. (Всеросс., 2015, РЭ, 9) Величина скорости камня, брошенного с горизонтальной плоскости под углом к горизонту, через время  $\tau = 0,5$  с после броска составляла  $\alpha = 80\%$  от величины начальной скорости, а ещё через  $\tau$  соответственно  $\beta = 70\%$ .

- 1) Найдите продолжительность  $T$  полёта камня.
- 2) На каком расстоянии  $S$  от места броска упал камень?

Ускорение свободного падения  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>, сопротивлением воздуха можно пренебречь.

$$v_0 \cos \alpha = v_0 \cos \beta \Rightarrow \alpha = 80^\circ, \beta = 70^\circ$$

ЗАДАЧА 16. Школьник Вася, находясь на улице и пытаясь привлечь внимание одноклассницы Маши, бросает ей в окно маленький камешек. Окно Маши расположено на высоте  $h$  над землёй, а скорость броска Васи равна  $v_0$ .

а) Найдите расстояние  $s$  между Васей и Машиним окном, если камешек летел в течение времени  $t$ .

б) Докажите неравенство  $v_0^2 \geq g(s + h)$ .

в) При каком максимальном расстоянии до окна Вася сможет попасть в него камешком?

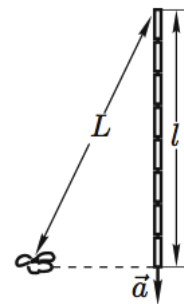
г) Покажите, что максимум величины  $s$  достигается в том и только в том случае, если конечная скорость камешка (в момент попадания в окно) перпендикулярна его начальной скорости.

$$v_0 \sin \alpha = v_0 \cos \beta \Rightarrow \alpha = 45^\circ, \beta = 45^\circ$$

ЗАДАЧА 17. Мальчик бросает с балкона (точка  $A$ ) мяч со скоростью  $v_0$  под некоторым углом к горизонту. Спустя время  $t$  мяч падает на землю (точка  $B$ ). Найдите расстояние  $AB$ . Балкон расположен на высоте  $h$  над землёй.

$$\frac{v_0^2}{2g} - v_0 \sin \alpha + h = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

ЗАДАЧА 18. (Всеросс., 2007, финал, 9) Пассажирский поезд длиной  $l$  стоял на первом пути. В последнем вагоне сидел Дядя Фёдор (герой книги Э. Успенского «Каникулы в Простоквашино») и ожидал письмо, которое ему должен был передать Шарик от кота Матроскина. В тот момент, когда поезд тронулся, на привокзальной площади, как раз напротив первого вагона, появился Шарик (рис.). Он определил, что расстояние до последнего вагона равно  $L$ . С какой минимальной скоростью  $v_0$  должен бежать пёс, чтобы передать письмо, если поезд движется с постоянным ускорением  $\bar{a}$ ?

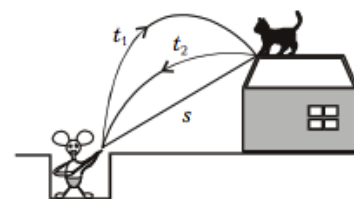


$$(1 - T)v^{\wedge} = 0a$$

ЗАДАЧА 19. (Всеросс., 2004, финал, 9) При осаде древней крепости осаждённые вели стрельбу по наступающему противнику с помощью катапульта из-за крепостной стены высотой  $h = 20,4$  м. Начальная скорость снарядов  $v_0 = 25$  м/с. На каком максимальном расстоянии  $l_{\max}$  от стены находились цели, которых могли достигать снаряды катапульта? Сравните это расстояние с максимальной дальностью  $L_{\max}$  снаряда катапульта. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

$$l_{\max} \approx \frac{v_0^2}{g} = \frac{25^2}{9.8} \approx 63.7 \text{ м}; L_{\max} \approx \frac{v_0^2}{g} = \frac{25^2}{9.8} = 63.7 \text{ м}$$

ЗАДАЧА 20. (Всеросс., 2000, финал, 9) Кот Леопольд стоял у края крыши сарая. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, через  $t_1 = 1,2$  с упруго отразился от наклонного ската крыши сарая у самых лап кота и через  $t_2 = 1,0$  с попал в лапу стрелявшего мышонка (см. рисунок). На каком расстоянии  $s$  от мышей находился кот Леопольд?

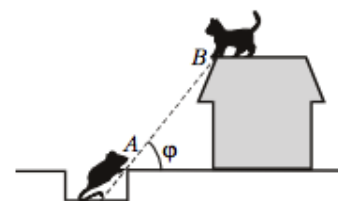


$$v_1 t_1 \sin \frac{\alpha}{2} = s$$

ЗАДАЧА 21. (МОШ, 2007, 10) Школьник бросает мяч в баскетбольное кольцо. Чтобы попасть в цель при броске под углом  $\alpha_1 = 30^\circ$  к горизонту, он должен сообщить мячу начальную скорость  $v_1 = v$ , а при броске под углом  $\alpha_2 = 60^\circ$  — начальную скорость  $v_2 = v/2$ . На какой высоте  $h$  над точкой бросания расположено баскетбольное кольцо? Под каким углом  $\beta$  к горизонту наклонён отрезок, соединяющий точку бросания и кольцо? Бросок каждый раз производится из одной и той же точки. Сопротивлением воздуха можно пренебречь, ускорение свободного падения равно  $g$ .

$$v_1 \sin \alpha_1 = v_2 \sin \alpha_2 = v \sin \alpha_1 = v \sin 30^\circ = \frac{v}{2} = v_2 \sin 60^\circ = \frac{v}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{v\sqrt{3}}{4} = v_2 \sin \beta = \frac{v}{2} \sin \beta = \frac{v\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = 60^\circ$$

ЗАДАЧА 22. (Всеросс., 2002, финал, 10) Кот Леопольд сидел на самом краю крыши сарая. Два озорных мышонка решили выстрелить в него из рогатки, но кот заметил их и решил отстреливаться. . . Камни из рогаток мышат и кота вылетели одновременно и столкнулись в середине отрезка  $AB$  (см. рисунок). Найдите высоту  $H$  сарая и отношение пути, пройденного камнем кота Леопольда, к пути, пройденному камнем мышат, если известно, что  $\varphi = 30^\circ$ , скорость камня, вылетевшего из рогатки мышат,  $v_0 = 7$  м/с, а кот выстрелил горизонтально.



$$v_0 \sin \varphi = v_0 \sin 30^\circ = 7 \cdot \frac{1}{2} = 3.5 \text{ м/с}; v_0 \cos \varphi = 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6.06 \text{ м/с}; H = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} = \frac{49 \cdot \frac{1}{4}}{19.6} = 0.625 \text{ м}; \frac{s_{\text{мышат}}}{s_{\text{Леопольд}}} = \frac{v_0 \cos \varphi}{v_0 \sin \varphi} = \frac{6.06}{3.5} = 1.73$$

ЗАДАЧА 23. («Физтех», 2011, 11) Камень брошен со скоростью  $v_0 = 17$  м/с под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту. С какой угловой скоростью поворачивается вектор скорости камня через  $t = 1$  с после броска? Принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, сопротивление воздуха не учитывать.

$$\omega / \text{rad s}^{-1} \approx \frac{v_0 \sin 2\alpha - g t \cos \alpha}{v_0 \cos \alpha} = \omega$$