Баллистика. Координаты

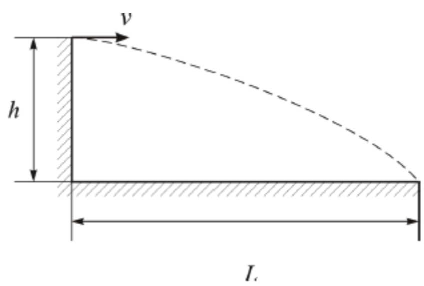
Полёт камня в поле силы тяжести является равноускоренным движением: ускорение постоянно и равно $\vec{g}$ (сопротивление воздуха не учитываем). Траекторией камня, брошенного под ненулевым углом к вертикали, является парабола. Такое движение удобно рассматривать как наложение двух движений:

1) равномерного движения по горизонтали;
2) движения по вертикали с ускорением g, направленным вниз.

Задача 1. (*«Физтех», 2012, 9–11*) С башни высотой $H = 20$ м брошен горизонтально камень, который упал на горизонтальную поверхность Земли на расстоянии $S = 10$ м от основания башни. С какой скоростью был брошен камень? Принять $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывать.

$v_0 = S\sqrt{\frac{g}{2H}} = 5$ м/с

Задача 2. (*«Курчатов», 2016, 9*) Дальность полёта L тела, брошенного горизонтально со скоростью $v = 3$ м/с, в 3 раза больше высоты h, с которой бросили тело. Найдите время полёта тела и модуль скорости тела непосредственно перед падением на горизонтальную поверхность. Модуль ускорения свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.



$t = \frac{2v}{3g} = 0{,}2$ с; $u = \sqrt{v^2 + 2gh} \approx 3{,}6$ м/с

Задача 3. Тело брошено с поверхности земли со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Поместите начало координат в точку броска, ось x направьте горизонтально в сторону броска, ось y — вертикально вверх.

1) Найдите, как зависят от времени проекции скорости тела v_x и v_y, а также координаты тела x и y.

2) Найдите дальность полёта L, время полёта T и максимальную высоту подъёма H. Рассматривая L как функцию угла α, определите, при каком α достигается максимальная дальность броска и чему она равна.

3) Исключив время из равенств $x = x(t)$, $y = y(t)$, получите уравнение траектории $y = y(x)$ и докажите тем самым, что тело двигается по параболе.

См. конец листка

Задача 4. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 10*) Точечное тело бросают с поверхности Земли под некоторым углом к горизонту. Определите, при каких значениях этого угла кинетическая энергия тела в течение всего времени полёта будет больше его потенциальной энергии. Потенциальная энергия на поверхности Земли равна нулю; сопротивлением воздуха можно пренебречь.

$\alpha < 45°$

Задача 5. (*Всеросс., 2020, ШЭ, 11*) С крутого обрыва на острове Буян туристы бросили бутылку под углом 30° к горизонту, сообщив ей начальную скорость 10 м/с. Известно, что в море бутылка упала, имея вдвое большую по модулю скорость. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

1. С какой высоты бросили бутылку? Ответ укажите в метрах, округлив до целого числа.

2. Под каким углом к горизонту бутылка вошла в воду? Ответ укажите в градусах, округлив до целого числа.

3. Найдите время полёта бутылки, если известно, что во время её движения расстояние от бутылки до воды всё время уменьшалось. Ответ укажите в секундах, округлив до десятых долей.

1) 15; 2) 64; 3) 1,3

Задача 6. (*«Физтех», 2016, 9*) Камень брошен с поверхности Земли под углом к горизонту со скоростью $v_0 = 10$ м/с. В верхней точке траектории скорость камня оказалась $v = 6$ м/с. Сопротивление воздуха не учитывать. Принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1) Найти вертикальную составляющую скорости камня при броске.

2) Найти время полёта камня до верхней точки траектории.

1) 8 м/с; 2) 0,8 с

Задача 7. (*«Курчатов», 2019, 9*) Человек стреляет из пушки по мишени. На расстоянии 300 м от него стоит стенка высотой 120 м, за которой на расстоянии 100 м на земле стоит мишень. С какой скоростью ядро вылетит из пушки при удачном выстреле?

$v > 66{,}7$ м/с

Задача 8. (*«Физтех», 2018, 9*) Пушка 1 установлена так, что может производить выстрелы снарядами под углом α к горизонту с неизменной (от выстрела к выстрелу) начальной скоростью v_0. Пушка 2 расположена на горизонтальной поверхности Земли, на одной вертикали с точкой, в которой снаряды, выпущенные из пушки 1, достигают максимальной высоты. Пушка 2 может производить выстрелы снарядами вертикально вверх с некоторой другой неизменной (от выстрела к выстрелу) начальной скоростью.

1) Из пушек 1 и 2 поочередно выпускаются снаряды. Найти начальную скорость снарядов, выпускаемых из пушки 2, если максимальная высота их подъёма вдвое больше, чем максимальная высота подъёма снарядов, выпускаемых из пушки 1.

2) Через какое время после выстрела из пушки 1 должна выстрелить пушка 2, чтобы произошло столкновение снарядов?

Сопротивление воздуха не учитывать.

1) $u_0 = v_0\sqrt{2}\sin\alpha$; 2) $\tau = \left(2 - \sqrt{2}\right)\frac{v_0 \sin\alpha}{g}$

Задача 9. (*«Физтех», 2019, 9*) Плоский склон холма образует угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. Мяч, брошенный с поверхности склона в горизонтальном направлении «вниз» по склону, через $\tau = 0{,}5$ с движется со скоростью $V_1 = 13$ м/с. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

1. Найдите начальную скорость V_0 мяча.

2. Через какое время t_1 после старта мяч находился на максимальном расстоянии от поверхности склона?

3. На каком максимальном расстоянии H от поверхности склона находился мяч в этот момент?

1) $V_0 = \sqrt{V_1^2 - (g\tau)^2} = 12$ м/с; 2) $t_1 = \frac{V_0 \sin\alpha}{g\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0{,}7$ с; 3) $H = \frac{(V_0\sin\alpha)^2}{2g\cos\alpha} = \frac{6\sqrt{3}}{5} \approx 2{,}1$ м

Задача 10. (*«Физтех», 2019, 9*) На плоском склоне с уклоном $\alpha = 30^\circ$ бросают мяч с начальной скоростью $V_0 = 10$ м/с перпендикулярно склону. Точка старта находится на поверхности склона. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1. Через какое время T мяч упадет на склон первый раз?

2. На каком расстоянии S_1 от точки старта мяч упадет на склон первый раз?

3. На каком расстоянии S_2 от точки старта мяч упадет на склон второй раз после упругого соударения с поверхностью склона?

1) $T = \frac{2V_0}{g\cos\alpha} = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2{,}3$ с; 2) $S_1 = \frac{2V_0^2\sin\alpha}{g\cos^2\alpha} = \frac{40}{3} \approx 13{,}3$ м; 3) $S_2 = 4S_1 = \frac{160}{3} \approx 53{,}3$ м

Задача 11. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 7–9*) Две частицы одновременно начали двигаться в однородном поле тяжести g. Начальные их скорости равны по модулю v_0 и лежат в одной вертикальной плоскости. Угол наклона вектора одной из скоростей к горизонту равен α, а другой — 2α. В какой момент времени τ от начала движения скорости частиц окажутся сонаправленными? Сопротивлением воздуха пренебречь.

$\tau = \frac{v_0\cos\frac{\alpha}{2}}{g\sin\frac{3\alpha}{2}}$

Задача 12. (*МОШ, 2015, 9*) Мячик бросают с начальной скоростью v с поверхности земли под углом α к горизонту. В момент нахождения мячика на максимальной высоте из той же точки на поверхности земли бросают камень под углом β к горизонту. Размеры мячика и камня малы, сопротивлением воздуха можно пренебречь.

1) Определите, с какой начальной скоростью u бросили камень, если он столкнулся с мячиком во время его полёта.

2) Найдите время движения камня от момента его броска до момента столкновения с мячиком.

$u = \frac{v\cos\alpha}{\cos\beta - 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\sin\beta}$, $\tau = \frac{v\sin^2\alpha(\cos\beta - 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\sin\beta)}{2g\cos\alpha\sin\beta}$

Задача 13. (*«Физтех», 2016, 10*) Камень, брошенный мальчиком с горизонтальной поверхности Земли под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, через $t_0 = 0{,}8$ с перелетает через забор с горизонтально направленной скоростью, почти касаясь забора. Сопротивление воздуха не учитывать. Принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1) Найти начальную скорость камня.
2) Найти высоту забора.
3) Найти расстояние от мальчика до забора.

1) $v_0 = \frac{gt_0}{\sin\alpha} = 16$ м/с; 2) $h = \frac{gt_0^2}{2} = 3{,}2$ м; 3) $L = gt_0^2 \operatorname{ctg}\alpha \approx 11$ м

Задача 14. (*«Физтех», 2019, 10*) Пушка установлена на плоском склоне горы, образующем угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. При выстреле «вверх» по склону снаряд падает на склон на расстоянии $S_1 = 700$ м от места выстрела. В момент падения скорость снаряда перпендикулярна поверхности склона. Пушку разворачивают на 180° и производят второй выстрел «вниз» по склону. Затем пушку перемещают на горизонтальную поверхность и производят третий выстрел. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой. Угол наклона ствола к поверхности, с которой стреляют, при всех выстрелах одинаков.

1. На каком расстоянии S_2 от места второго выстрела снаряд упадет на склон?

2. Найдите дальность L стрельбы при третьем выстреле.

1) $S_2 = 3S_1 = 2100$ м; 2) $L = \sqrt{3}S_1 \approx 1212$ м

Задача 15. (*«Физтех», 2019, 10*) Теннисист тренируется на горизонтальной площадке, посылая мяч к вертикальной стенке. В первом случае мяч летит практически с уровня земли с начальной скоростью $V_0 = 22$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту и ударяется в стенку. Во втором случае мяч стартует из той же точки со скоростью $\frac{V_0}{2}$ под углом 2α к горизонту и ударяется в ту же точку стенки. Соударения мяча со стенкой абсолютно упругие. Мяч движется в вертикальной плоскости перпендикулярной стенке. Силой сопротивления воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1. На какой максимальной высоте H находился мяч в полете в первом случае?

2. На какой высоте h мяч ударяется в стенку?

3. Через какое время τ после удара о стенку мяч упадет на площадку во втором случае?

1) $H = \frac{(V_0\sin\alpha)^2}{2g} = 6{,}05$ м; 2) $h = \frac{9}{121}\frac{V_0^2}{g} = 3{,}6$ м; 3) $\tau = \frac{3\sqrt{3}}{22}\frac{V_0}{g} \approx 0{,}52$ с

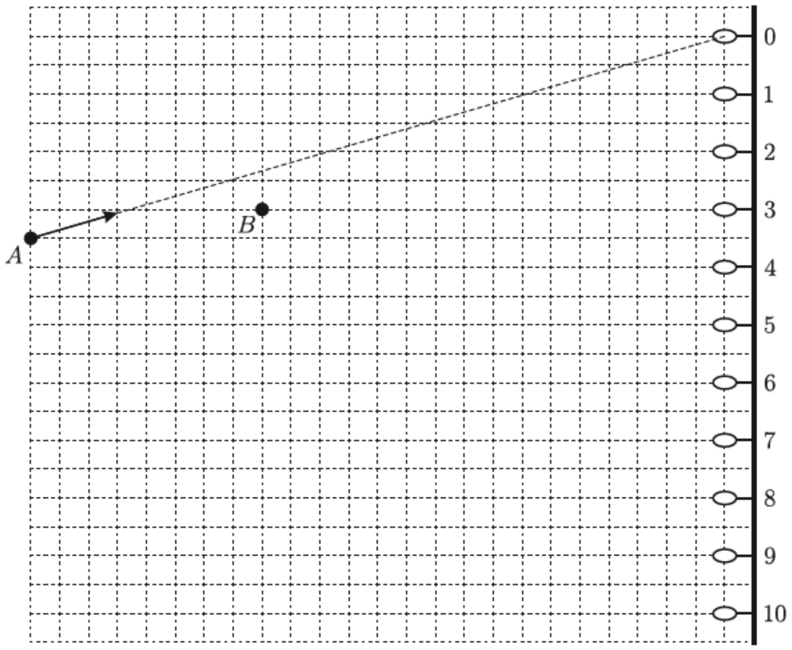
Задача 16. (*Всеросс., 2014, МЭ, 9–10*) Из танка, двигающегося со скоростью $u = 15$ м/с, в направлении его движения выпускают снаряд. Начальная скорость снаряда относительно Земли направлена под таким углом α к горизонту, что $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$. К моменту падения снаряда на Землю танк проехал $1/20$ дальности полёта снаряда. Определите максимальную высоту h, на которую поднялся снаряд во время полёта. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2.

$h = \frac{8u^2}{g} = 180$ м

Задача 17. (*Всеросс., 2019, МЭ, 10*) Под каким углом α к горизонтали брошен камень, если в верхней точке траектории он был виден с места броска под углом β к горизонтали? Влиянием воздуха на движение камня пренебречь.

$\boxed{\alpha = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)}$

Задача 18. (*МОШ, 2008, 9*) К вертикальной стенке через равные интервалы прикреплены баскетбольные кольца, пронумерованные от 0 до 10. Стремясь попасть в одно из колец, школьник бросил мяч из точки A точно по направлению к кольцу с номером 0 (см. рисунок). В некоторый момент полёта мяч находился в точке B. В какое из баскетбольных колец он попадёт? Влиянием воздуха пренебречь.

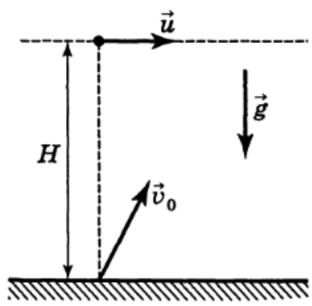


$\boxed{\text{В кольцо 6}}$

Задача 19. (*МОШ, 2017, 10*) Два гоночных автомобиля с открытыми (без крыльев) колёсами едут друг за другом по мокрому прямолинейному горизонтальному шоссе со скоростью $v = 150$ км/ч. При каком минимальном расстоянии r между ними брызги из-под колёс переднего автомобиля не будут попадать на лобовое стекло заднего? Размерами автомобилей по сравнению с расстоянием между ними пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g = 9{,}8$ м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывать.

$\boxed{r = \frac{v^2}{g} \approx 177 \text{ м}}$

Задача 20. (*Всеросс., 1997, финал, 9*) Птица летит горизонтально на высоте H с постоянной скоростью u. Плохой мальчик из 9 класса замечает птицу в момент, когда она находится в точности над его головой, и сразу же стреляет из рогатки. Какой должна быть скорость u птицы, чтобы мальчик никак не смог попасть в неё? Максимальная скорость вылета камня равна v_0. Сопротивлением воздуха пренебречь.



$\boxed{\text{Если } v_0 \leqslant \sqrt{2gH}, \text{ то } u \text{ — любая; если } v_0 > \sqrt{2gH}, \text{ то } u > \sqrt{v_0^2 - 2gH}}$

Задача 21. (*«Курчатов», 2019, 11*) Два шарика, связанных легкой нитью, запускают с поверхности Земли с одинаковыми по модулю скоростями v_0 под разными углами: один шарик под углом 30° к горизонту, другой — под углом 60°.

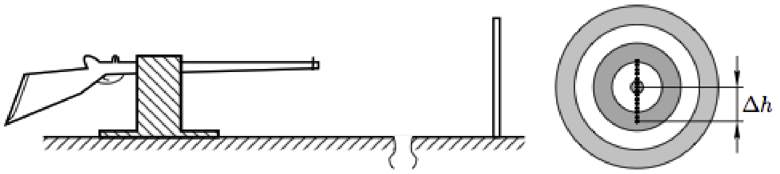
1. Найдите максимальное расстояние между шариками.

2. Какие значения может принимать угол между нитью и горизонтом?

Шарики выпущены из одной точки, летят в одной плоскости в одну сторону. Шарик, который упадет первым, остаётся на поверхности Земли. Нить считать всегда натянутой, силами упругости пренебречь.

1) $L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)$; 2) $\varphi \in [45^\circ; 60^\circ]$

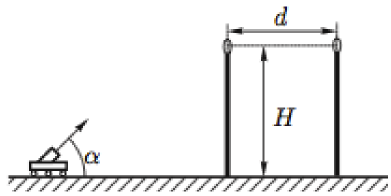
Задача 22. (*Всеросс., 2011, РЭ, 9*) Мелкокалиберную винтовку закрепили на стенде так, что её ствол оказался горизонтальным (левый рисунок). После этого из винтовки начали стрелять в мишень, находящуюся от неё на расстоянии $L = 50$ м. Из-за небольшого разброса Δv скоростей пуль они попадают в мишень на разной высоте (правый рисунок), причём максимальное отклонение высоты их попадания в мишень от её среднего значения составляет $\Delta h = 17$ мм. Определите максимальное отклонение Δv скорости пули от её среднего значения $v_0 = 350$ м/с.



Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Изменение скорости пули из-за сопротивления воздуха не учитывать.

$\Delta v = \frac{v_0^3 \Delta h}{gL^2} \approx 29$ м/с

Задача 23. (*Всеросс., 2013, РЭ, 9*) На ровном гладком полу установлены два шеста высоты H с небольшими кольцами наверху. Расстояние между кольцами d (см. рисунок), а их плоскости перпендикулярны линии, соединяющей вершины шестов. По полу может перемещаться маленький робот, функция которого — запускать небольшие мячики с фиксированной скоростью v_0 под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Скорость v_0 подобрана так, что $v_0^2 > 4gH$. При каком минимальном $d \neq 0$ робот может выполнить бросок так, чтобы мячик пролетел сквозь оба кольца? Удар мяча о пол считайте абсолютно упругим. Отдельно рассмотрите случай $gH \ll v_0^2$.



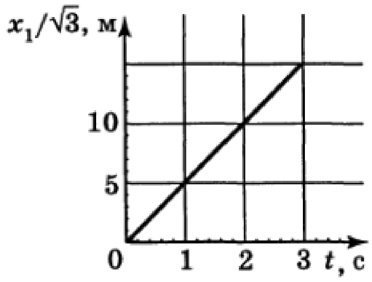
$d = L\sqrt{1-\frac{4H}{L}}$ при $3L \leqslant 16H$; $d = L\left(1-\sqrt{1-\frac{4H}{L}}\right)$ при $3L > 16H$; здесь $L = \frac{v_0^2}{g}$. Если $H \ll L$, то $d = 2H$.

Задача 24. (*Всеросс., 2017, РЭ, 9*) Небольшую петарду подвесили на нити на высоте H над горизонтальной поверхностью. В результате взрыва она распалась на два осколка, которые полетели в противоположные стороны с одинаковыми начальными скоростями v_0, направленными вдоль одной прямой. Какое наибольшее расстояние L может оказаться между осколками после их падения? С места падения осколки не смещаются.

$$L_{\max} = \begin{cases} v_0\sqrt{\frac{8H}{g}}, & \text{если } v_0^2 < 2gH; \\ 2H + \frac{v_0^2}{g}, & \text{если } v_0^2 \geqslant 2gH \end{cases}$$

[Овчинкин] → 1.4, 1.5, 1.6, 4.44.

Задача 25. (*Всеросс., 1994, финал, 9*) Два небольших стальных шарика, размером которых в условиях задачи можно пренебречь, находятся в одной точке горизонтальной плоскости. Шарики одновременно бросают с одинаковыми начальными скоростями. Начальная скорость первого шарика составляет угол $\alpha_1 = 30°$ с горизонтом, скорость второго — некоторый угол α_2, причём $45° < \alpha_2 < 90°$. Горизонтальная координата x_1 первого шарика во время полёта изменяется по закону, представленному на графике (рис.).

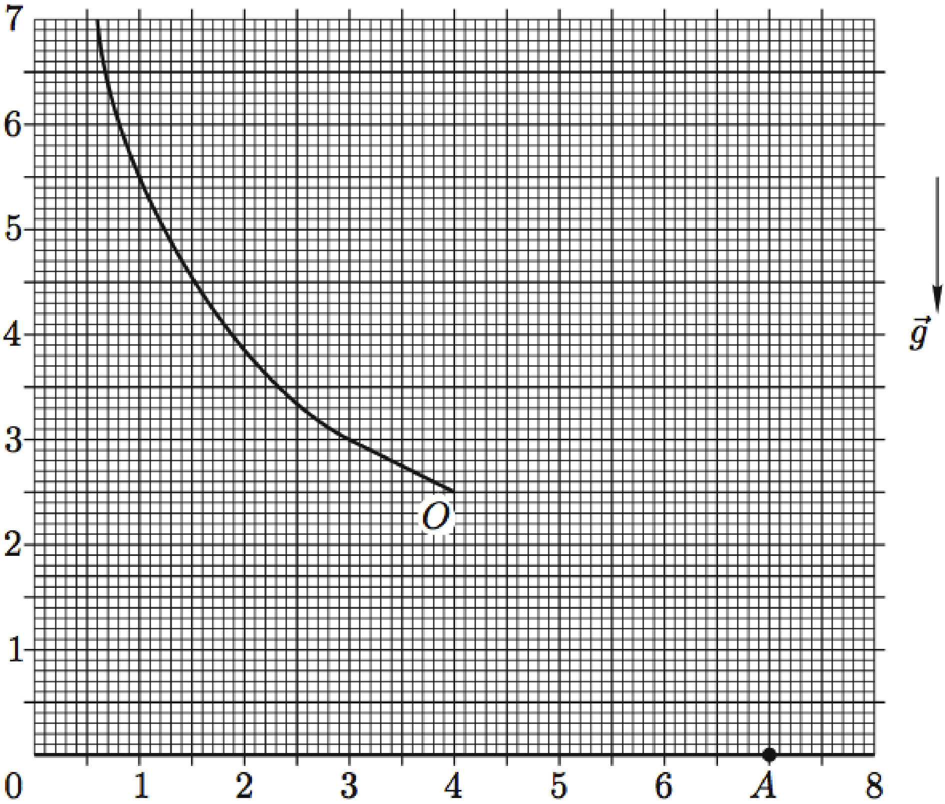


Спустя время $t = 7/5$ с после броска оба шарика оказались на одной высоте над плоскостью. Определите угол α_2, под которым брошен второй шарик, а также расстояние между шариками через 1 с после броска. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Считать, что соударение шариков с горизонтальной плоскостью происходит по законам упругого удара.

$\alpha_2 = \arcsin\frac{11}{14} \approx 52°$; $d = \frac{10}{\sqrt{7}} \approx 3{,}8$ м

Задача 26. (*Всеросс., 2011, финал, 9*) Небольшое тело отпустили без начальной скорости в некоторой точке M гладкого изогнутого желоба. Оторвавшись от желоба в точке O, оно упало на пол в точке A (рис.). С помощью построений и расчётов покажите на рисунке положение точки M желоба, в которой тело было отпущено. Каково расстояние (в условных единицах) от пола до точки M?

Масштабы по осям рисунка даны в некоторых условных единицах.

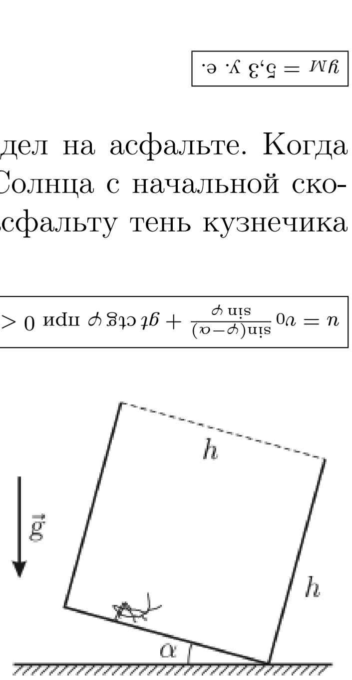


$y_M = 5{,}3$ у. е.

Задача 27. (*МОШ, 2006, 10*) Однажды летним утром кузнечик сидел на асфальте. Когда Солнце поднялось на угол φ над горизонтом, он прыгнул в сторону Солнца с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. С какой скоростью движется по асфальту тень кузнечика спустя время t после прыжка?

$u = v_0 \frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin\varphi} + gt\,\mathrm{ctg}\,\varphi$ при $0 < t < \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

Задача 28. (*МОШ, 2008, 10*) В открытой прямоугольной коробке сидит кузнечик, который умеет прыгать с начальной скоростью $V_0 = 3$ м/с под любым углом к горизонту. На какой минимальный угол к горизонту нужно наклонить коробку, чтобы кузнечик смог из неё выпрыгнуть? Считать, что каждая грань коробки является квадратом со стороной $h = 52$ см. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

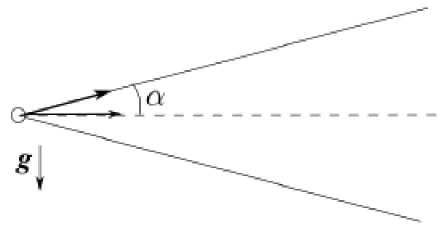


$\alpha = \arccos \frac{V_0^2}{2gh} \approx 30°$

Задача 29. (*Всеросс., 2017, МЭ, 11*) Стоя на движущемся вниз эскалаторе, мальчик подбросил монетку, как ему показалось, вертикально вверх, и через $\tau = 1$ с поймал её. Скорость эскалатора $V = 1$ м/с, а угол его наклона к горизонту $\alpha = 30°$. На какое максимальное расстояние от точки бросания удалялась монетка? В течение какого времени монетка поднималась вверх в системе отсчёта, связанной со стенами шахты эскалатора? Ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с^2.

1,09 м; 0,45 с

Задача 30. (*МОШ, 2016, 10*) Тёмной ночью на верхушку высокого столба повесили фонарь так, что пучок излучаемого им света образует прямой круговой конус с углом раствора 2α, и ось этого конуса параллельна земле. Из точки крепления фонаря бросают маленькие шарики с одним и тем же модулем начальной скорости так, что их траектории полностью лежат в вертикальной плоскости, содержащей ось конуса. Первый шарик, запущенный вдоль оси конуса, был виден в течение времени $\tau = 2$ с. В течение какого времени τ_1 будет виден шарик, запущенный вверх под углом α к горизонту? Через какое время τ_2 с момента начала движения этот шарик пересечёт ось конуса? Чему равен модуль начальной скорости v, с которой запускают шарики?



Считайте пучок узконаправленным (угол раствора конуса достаточно мал). Размерами фонаря и шариков можно пренебречь. Для малых углов $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ (когда α выражен в радианах), $\cos\alpha \approx 1$. Ускорение свободного падения g известно.

$\tau_1 = 4$ с; $\tau_2 = 2$ с; $v = \frac{g\tau}{2\alpha}$

Задача 31. (*«Росатом», 2011, 11*) Тело бросили под углом к горизонту. Известно, что время полёта тела равно τ, а отношение максимальной и минимальной скоростей тела в процессе движения $v_{\max}/v_{\min} = k$. Определить дальность полёта. Сопротивлением воздуха пренебречь.

$l = \frac{g\tau^2}{2\sqrt{k^2-1}}$

Задача 32. (*МФТИ, 1997*) Снаряд разорвался на несколько осколков, полетевших во все стороны с одинаковыми скоростями. Осколок, полетевший вертикально вниз, достиг земли за время t_1. Осколок, полетевший вертикально вверх, упал на землю через время t_2. Сколько времени падали осколки, полетевшие горизонтально? Сопротивление воздуха не учитывать.

$t = \sqrt{t_1 t_2}$

Задача 33. (*МФТИ, 1982*) Мяч, брошенный одним игроком другому под углом к горизонту со скоростью $v_0 = 20$ м/с, достиг высшей точки траектории через секунду. На каком расстоянии друг от друга находились игроки? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

$l = 2\tau\sqrt{v_0^2 - (g\tau)^2} \approx 35$ м

Задача 34. (*МФТИ, 1982*) Баскетболист бросает мяч в кольцо. Скорость мяча после броска $v_0 = 8$ м/с и составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом. С какой скоростью мяч попал в кольцо, если он долетел до него за секунду? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

$v = \sqrt{v_0^2 + (g\tau)^2 - 2v_0 g\tau \sin\alpha} \approx 5$ м/с

Задача 35. (*МФТИ, 1982*) Камень бросили с крутого берега реки вверх под углом 30° к горизонту со скоростью $v_0 = 10$ м/с. С какой скоростью он упал в воду, если время полёта $t = 2$ с? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

$v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2 - 2v_0 gt \sin\alpha} \approx 17$ м/с

Задача 36. (*«Росатом», 2018, 11*) Граната брошена вертикально вверх с начальной скоростью v_0. В верхней точке своей траектории граната разрывается на множество осколков, которые разлетаются во все стороны с одинаковыми скоростями. Известно, что осколки падали на землю в течение интервала времени Δt. Через какое время после взрыва упал на землю самый первый осколок?

$\tau = \frac{\Delta t}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{2v_0}{g\Delta t}\right)^2} - 1\right)$

Задача 37. (*«Росатом», 2013, 11*) Симметричная граната, брошенная с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, в верхней точке траектории разорвалась на множество одинаковых осколков. Через какое время после взрыва упал на землю самый первый осколок, если осколки падали на землю в течение времени Δt?

$\tau = \frac{\Delta t}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{2v_0 \sin\alpha}{g\Delta t}\right)^2} - 1\right)$

Задача 38. (*«Физтех», 2014, 9–10*) Лежавшая на наклонённой под углом α ($\cos\alpha = 5/6$) к горизонту поверхности граната взорвалась, в результате чего во все стороны разлетелось множество осколков с одинаковой начальной скоростью $v = 10$ м/с. Через какое время после взрыва на поверхность упадёт последний осколок? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

$t = 2{,}4$ с

Задача 39. (*«Росатом», 2013, 11*) На одном из островов Бермудского треугольника ускорение свободного падения отклонено на юг и составляет угол α с вертикалью. На каком расстоянии от туземца упадет камень, брошенный вертикально вверх с начальной скоростью v_0? В каком направлении его следует бросить, чтобы он вернулся обратно? Вращение Земли не учитывать.

$l = \frac{2v_0^2 \sin\alpha}{g\cos^2\alpha}$; в направлении, противоположном вектору $\vec{g}$

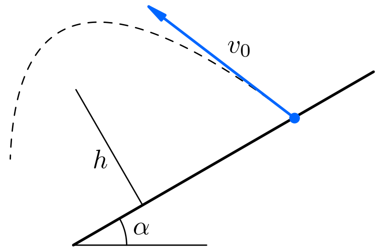
Задача 40. (*МОШ, 2014, 9–10*) На земле рядом со светящейся лампочкой лежат два футбольных мяча. Футболист Вася ударил по мячу и наблюдает за движением тени от мяча по вертикальной стене. Вася обнаружил, что тень сразу после удара находилась на высоте 20 м и после этого двигалась вниз с постоянной скоростью 4 м/с. Затем футболист Петя ударил по второму мячу в том же направлении, что и Вася, сообщив мячу вдвое большую скорость под тем же углом к горизонту.

А) На какой высоте будет находиться сразу после удара тень от мяча Пети? Ответ выразите в метрах и округлите до десятых.

В) С какой скоростью будет двигаться вниз тень от мяча Пети? Ответ представьте в м/с и округлите до десятых.

А) 20; В) 2

Задача 41. (*«Физтех», 2011, 10*) Плоская поверхность горы наклонена под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Перпендикулярно поверхности установлен тонкий забор, высшая точка которого находится на расстоянии $h = 7$ м от поверхности горы. Требуется перебросить через забор маленький камень, бросив его с поверхности горы. Найдите минимальную начальную скорость, при которой это можно сделать, если место броска и направление начальной скорости можно выбирать произвольно. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2, сопротивление воздуха не учитывать.



$v_{0\,\min} = \sqrt{2gh\cos\alpha} \approx 11$ м/с

Задача 42. (*Всеросс., 2003, финал, 9*) Мальчик бросил камень под некоторым углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, при каких значениях угла бросания α камень всё время (до падения на землю) будет удаляться от мальчика.

$\sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Максимум дальности и перпендикулярность скоростей

В стандартной задаче о броске под углом к горизонту максимум дальности достигается при угле бросания 45°. Обратите внимание, что при этом конечная скорость тела перпендикулярна начальной. Интересно, что эта связь прослеживается и в некоторых других задачах: максимум дальности достигается при условии перпендикулярности конечной и начальной скоростей.

Задача 43. Вернёмся к задаче 1.4 Овчинкина. Покажите, что при найденном значении $\alpha = \frac{3\pi}{8}$ скорость мины при падении на склон перпендикулярна её начальной скорости.

Задача 44. Обобщим задачу 1.4. Пусть гора наклонена к горизонту под углом θ. Под каким углом α к горизонту нужно выстрелить, чтобы мина достигла склона на максимальной высоте? Покажите, что при найденном α конечная скорость мины перпендикулярна начальной.

Задача 45. Максимальная дальность выстрела миномёта, расположенного на поверхности земли, равна ℓ. Миномёт подняли на высоту h. Какова теперь будет максимальная дальность выстрела L (по горизонтали)? Под каким углом α к горизонту нужно стрелять? Покажите, что при оптимальном α конечная скорость мины перпендикулярна начальной.

Примечание. Лобовое решение — написать уравнение траектории, положить $y = 0$, выразить x как функцию α и максимизировать — ведёт, похоже, к вычислительным трудностям. Существует изящный обходной манёвр!

$\boxed{L = \sqrt{\ell(\ell + 2h)},\ \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{\ell}{\ell+2h}}}$

Задача 46. Почему так получается? Существует ли какая-то общая идея (скажем, геометрическая), которая за всем этим стоит и обеспечивает максимизацию дальности при перпендикулярности скоростей в рассмотренных ситуациях? Имеются ли другие ситуации с аналогичной связью?

Ответ к задаче 3

1) $v_x = v_0 \cos\alpha$, $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$, $x = v_0 \cos\alpha \cdot t$, $y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$.

2) $L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, $T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, $H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$; $L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$ при $\alpha = 45°$.

3) $y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$.