

## Мощность переменного тока

Темы кодификатора ЕГЭ: переменный ток, вынужденные электромагнитные колебания.

Переменный ток несёт энергию. Поэтому крайне важным является вопрос о мощности в цепи переменного тока.

Пусть  $U$  и  $I$  — мгновенные значение напряжения и силы тока на данном участке цепи. Возьмём малый интервал времени  $dt$  — настолько малый, что напряжение и ток не успеют за это время сколько-нибудь измениться; иными словами, величины  $U$  и  $I$  можно считать постоянными в течение интервала  $dt$ .

Пусть за время  $dt$  через наш участок прошёл заряд  $dq = Idt$  (в соответствии с правилом выбора знака для силы тока заряд  $dq$  считается положительным, если он переносится в положительном направлении, и отрицательным в противном случае). Электрическое поле движущихся зарядов совершило при этом работу

$$dA = Udq = UI dt.$$

Мощность тока  $P$  — это отношение работы электрического поля ко времени, за которое эта работа совершена:

$$P = \frac{dA}{dt} = UI. \quad (1)$$

Точно такую же формулу мы получили в своё время для постоянного тока. Но в данном случае мощность зависит от времени, совершая колебания вместе током и напряжением; поэтому величина (1) называется ещё *мгновенной мощностью*.

Из-за наличия сдвига фаз сила тока и напряжение на участке не обязаны совпадать по знаку (например, может случиться так, что напряжение положительно, а сила тока отрицательна, или наоборот). Соответственно, мощность может быть как положительной, так и отрицательной. Рассмотрим чуть подробнее оба этих случая.

1. *Мощность положительна:  $P > 0$ .* Напряжение и сила тока имеют одинаковые знаки. Это означает, что направление тока совпадает с направлением электрического поля зарядов, образующих ток. В таком случае *энергия участка возрастает: она поступает на данный участок из внешней цепи* (например, конденсатор заряжается).
2. *Мощность отрицательна:  $P < 0$ .* Напряжение и сила тока имеют разные знаки. Стало быть, ток течёт против поля движущихся зарядов, образующих этот самый ток.

Как такое может случиться? Очень просто: электрическое поле, возникающее на участке, как бы «перевешивает» поле движущихся зарядов и «продавливает» ток против этого поля. В таком случае *энергия участка убывает: участок отдаёт энергию во внешнюю цепь* (например, конденсатор разряжается).

Если вы не вполне поняли, о чём только что шла речь, не переживайте — дальше будут конкретные примеры, на которых вы всё и увидите.

### Мощность тока через резистор

Пусть переменный ток  $I = I_0 \sin \omega t$  протекает через резистор сопротивлением  $R$ . Напряжение на резисторе, как нам известно, колеблется в фазе с током:

$$U = IR = I_0 R \sin \omega t = U_0 \sin \omega t.$$

Поэтому для мгновенной мощности получаем:

$$P = UI = U_0 I_0 \sin^2 \omega t = P_0 \sin^2 \omega t. \quad (2)$$

График зависимости мощности (2) от времени представлен на рис. 1. Мы видим, что мощность всё время неотрицательна — резистор забирает энергию из цепи, но не возвращает её обратно в цепь.

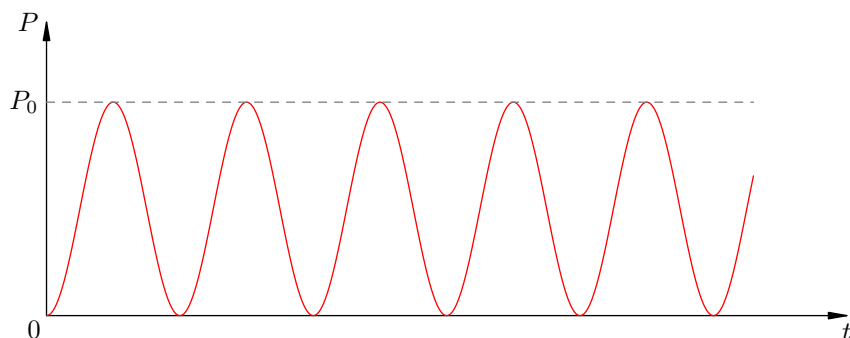


Рис. 1. Мощность переменного тока через резистор

Максимальное значение  $P_0$  нашей мощности связано с амплитудами тока и напряжения привычными формулами:

$$P_0 = U_0 I_0 = I_0^2 R = \frac{U_0^2}{R}.$$

На практике, однако, интерес представляет не максимальная, а *средняя* мощность тока. Это и понятно. Возьмите, например, обычную лампочку, которая горит у вас дома. По ней течёт ток частотой 50 Гц, т. е. за секунду совершается 50 колебаний силы тока и напряжения. Ясно, что за достаточно продолжительное время на лампочке выделяется некоторая средняя мощность, значение которой находится где-то между 0 и  $P_0$ . Где же именно?

Посмотрите ещё раз внимательно на рис. 1. Не возникает ли у вас интуитивное ощущение, что средняя мощность соответствует «середине» нашей синусоиды и принимает поэтому значение  $P_0/2$ ?

Это ощущение совершенно верное! Так оно и есть. Разумеется, можно дать математически строгое определение среднего значения функции (в виде некоторого интеграла) и подтвердить нашу догадку прямым вычислением, но нам это не нужно. Достаточно интуитивного понимания простого и важного факта:

*среднее значение квадрата синуса (или косинуса) за период равно 1/2.*

Этот факт иллюстрируется рисунком 2.

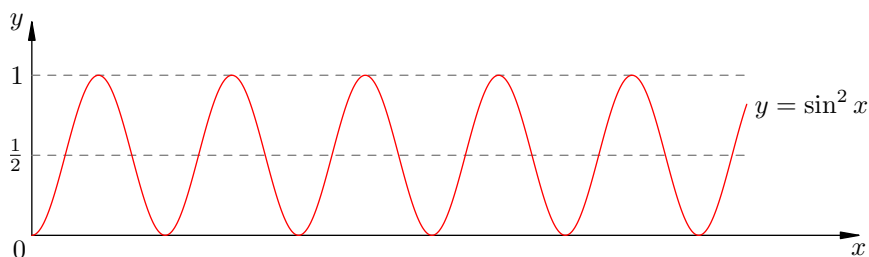


Рис. 2. Среднее значение квадрата синуса равно 1/2

Итак, для среднего значения  $\bar{P}$  мощности тока на резисторе имеем:

$$\bar{P} = \frac{P_0}{2} = \frac{U_0 I_0}{2} = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{U_0^2}{2R}. \quad (3)$$

В связи с этими формулами вводятся так называемые *действующие* (или *эффективные*) значения напряжения и силы тока<sup>1</sup>:

$$\bar{U} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad \bar{I} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Формулы (3), записанные через действующие значения, полностью аналогичны соответствующим формулам для постоянного тока:

$$\bar{P} = \bar{U} \bar{I} = \bar{I}^2 R = \frac{\bar{U}^2}{R}.$$

Поэтому если вы возьмёте лампочку, подключите её сначала к источнику постоянного напряжения  $U$ , а затем к источнику переменного напряжения с таким же действующим значением  $U$ , то в обоих случаях лампочка будет гореть одинаково ярко.

Действующие значения (4) чрезвычайно важны для практики. Оказывается, *вольтметры и амперметры переменного тока показывают именно действующие значения* (так уж они устроены). Знайте также, что пресловутые 220 вольт из розетки — это *действующее* значение напряжения бытовой электросети.

### Мощность тока через конденсатор

Пусть на конденсатор подано переменное напряжение  $U = U_0 \sin \omega t$ . Как мы знаем, ток через конденсатор опережает по фазе напряжение на  $\pi/2$ :

$$I = I_0 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = I_0 \cos \omega t.$$

Для мгновенной мощности получаем:

$$P = UI = U_0 I_0 \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} U_0 I_0 \sin 2\omega t = P_0 \sin 2\omega t.$$

График зависимости мгновенной мощности от времени представлен на рис. 3.

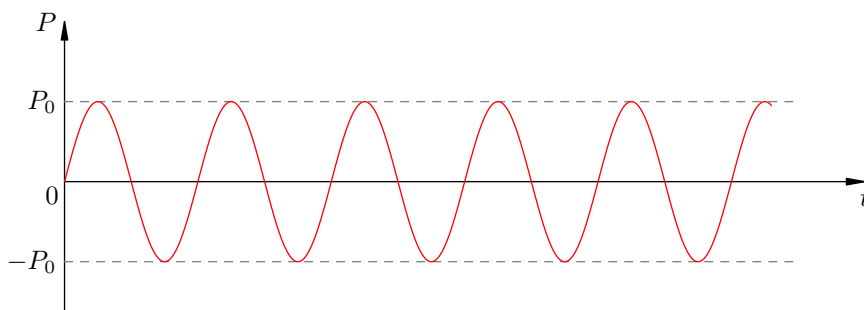


Рис. 3. Мощность переменного тока через конденсатор

<sup>1</sup>На самом деле это есть не что иное, как *средние квадратические* значения напряжения и тока. Такое у нас уже встречалось: средняя квадратическая скорость молекул идеального газа (листок «Уравнение состояния идеального газа»).

Чему равно среднее значение мощности? Оно соответствует «середине» синусоиды и в данном случае равно нулю! Мы видим это сейчас как математический факт. Но интересно было бы с физической точки зрения понять, почему мощность тока через конденсатор оказывается нулевой.

Для этого давайте нарисуем графики напряжения и силы тока в конденсаторе на протяжении одного периода колебаний (рис. 4).

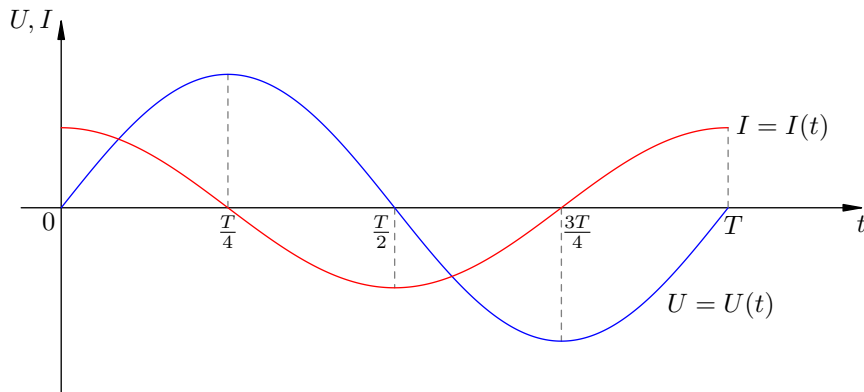


Рис. 4. Напряжение на конденсаторе и сила тока через него

Рассмотрим последовательно все четыре четверти периода.

1. *Первая четверть*,  $0 < t < T/4$ . Напряжение положительно и возрастает. Ток положителен (течёт в положительном направлении), конденсатор заряжается. По мере увеличения заряда на конденсаторе сила тока убывает.

Мгновенная мощность положительна: конденсатор накапливает энергию, поступающую из внешней цепи. Эта энергия возникает за счёт работы внешнего электрического поля, продвигающего заряды на конденсатор.

2. *Вторая четверть*,  $T/4 < t < T/2$ . Напряжение продолжает оставаться положительным, но идёт на убыль. Ток меняет направление и становится отрицательным: конденсатор разряжается против направления внешнего электрического поля. В конце второй четверти конденсатор полностью разряжен.

Мгновенная мощность отрицательна: конденсатор отдаёт энергию. Эта энергия возвращается в цепь: она идёт на совершение работы против электрического поля внешней цепи (конденсатор как бы «продавливает» заряды в направлении, противоположном тому, в котором внешнее поле «хочет» их двигать).

3. *Третья четверть*,  $T/2 < t < 3T/4$ . Внешнее электрическое поле меняет направление: напряжение отрицательно и возрастает по модулю. Сила тока отрицательна: идёт зарядка конденсатора в отрицательном направлении.

Ситуация полностью аналогична первой четверти, только знаки напряжения и тока — противоположные. Мощность положительна: конденсатор вновь накапливает энергию.

4. *Четвёртая четверть*,  $3T/4 < t < T$ . Напряжение отрицательно и убывает по модулю. Конденсатор разряжается против внешнего поля: сила тока положительна.

Мощность отрицательна: конденсатор возвращает энергию в цепь. Ситуация аналогична второй четверти — опять-таки с заменой знаков тока и напряжения на противоположные.

Мы видим, что энергия, забранная конденсатором из внешней цепи в ходе первой четверти периода колебаний, полностью возвращается в цепь в ходе второй четверти. Затем этот процесс повторяется вновь и вновь. Вот почему средняя мощность, потребляемая конденсатором, оказывается нулевой.

### Мощность тока через катушку

Пусть на катушку подано переменное напряжение  $U = U_0 \sin \omega t$ . Ток через катушку отстаёт по фазе от напряжения на  $\pi/2$ :

$$I = I_0 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -I_0 \cos \omega t.$$

Для мгновенной мощности получаем:

$$P = UI = -U_0 I_0 \sin \omega t \cos \omega t = -\frac{1}{2} U_0 I_0 \sin 2\omega t = -P_0 \sin 2\omega t.$$

Снова средняя мощность оказывается равной нулю. Причины этого, в общем-то, те же, что и в случае с конденсатором. Рассмотрим графики напряжения и силы тока через катушку за период (рис. 5).

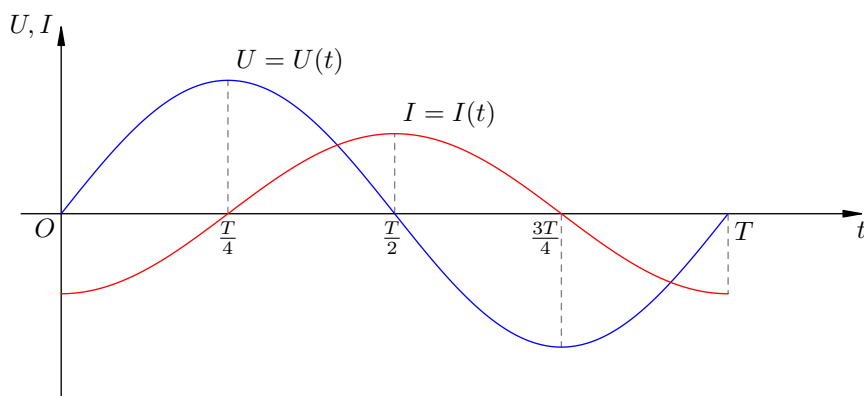


Рис. 5. Напряжение на катушке и сила тока через неё

Мы видим, что в течение второй и четвёртой четвертей периода энергия поступает в катушку из внешней цепи. В самом деле, напряжение и сила тока имеют одинаковые знаки, сила тока возрастает по модулю; для создания тока внешнее электрическое поле совершает работу против вихревого электрического поля, и эта работа идёт на увеличение энергии магнитного поля катушки.

В первой и третьей четвертях периода напряжение и сила тока имеют разные знаки: катушка возвращает энергию в цепь. Вихревое электрическое поле, поддерживающее убывающий ток, двигает заряды против внешнего электрического поля и совершает тем самым положительную работу. А за счёт чего совершается эта работа? За счёт энергии, накопленной ранее в катушке.

Таким образом, энергия, запасаемая в катушке за одну четверть периода, полностью возвращается в цепь в ходе следующей четверти. Поэтому средняя мощность, потребляемая катушкой, оказывается равной нулю.

### Мощность тока на произвольном участке

Теперь рассмотрим самый общий случай. Пусть имеется произвольный участок цепи — он может содержать резисторы, конденсаторы, катушки... На этот участок подано переменное напряжение  $U = U_0 \sin \omega t$ .

Как мы знаем из предыдущего листка «Переменный ток. 2», между напряжением и силой тока на данном участке имеется некоторый сдвиг фаз  $\alpha$ . Мы записывали это так:

$$I = I_0 \sin(\omega t - \alpha).$$

Тогда для мгновенной мощности имеем:

$$P = U_0 I_0 \sin \omega t \sin(\omega t - \alpha). \quad (5)$$

Теперь нам хотелось бы определить, чему равна средняя мощность. Для этого мы преобразуем выражение (5), используя формулу:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)).$$

В результате получим:

$$P = \frac{1}{2} U_0 I_0 (\cos \alpha - \cos(2\omega t - \alpha)). \quad (6)$$

Но среднее значение величины  $\cos(2\omega t - \alpha)$  равно нулю! Поэтому средняя мощность оказывается равной:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \alpha. \quad (7)$$

Данную формулу можно записать с помощью действующих значений (4) напряжения и силы тока:

$$\bar{P} = \bar{U} \bar{I} \cos \alpha.$$

Формула (7) охватывает все три рассмотренные выше ситуации. В случае резистора имеем  $\alpha = 0$ , и мы приходим к формуле (3). Для конденсатора и катушки  $\alpha = \pi/2$ , и средняя мощность равна нулю.

Кроме того, формула (7) даёт представление о весьма общей проблеме, связанной с передачей электроэнергии. Чрезвычайно важно, чтобы  $\cos \alpha$  у потребителя был как можно ближе к единице. Иначе потребитель начнёт возвращать значительную часть энергии назад в сеть (что ему совсем невыгодно), и к тому же возвращаемая энергия будет безвозвратно расходоваться на нагревание проводов и других элементов цепи.

С этой проблемой приходится сталкиваться разработчикам электрических схем, содержащих электродвигатели. Обмотки электродвигателей обладают большими индуктивностями, и возникает ситуация, близкая к «чистой» катушке. Чтобы избежать бесполезного циркулирования энергии по сети, в цепь включают дополнительные элементы, сдвигающие фазу — например, так называемые компенсирующие конденсаторы.