

**Всероссийская олимпиада школьников по математике****9 класс, региональный этап, 2017/18 год****Первый день**

1. Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратики каждого размера было одно и то же количество.
2. На доске написаны пять натуральных чисел. Оказалось, что сумма любых трёх из них делится на каждое из остальных. Обязательно ли среди этих чисел найдутся четыре равных?
3. Внутри параллелограмма  $ABCD$  выбрана точка  $E$  так, что  $AE = DE$  и  $\angle ABE = 90^\circ$ . Точка  $M$  — середина отрезка  $BC$ . Найдите угол  $DME$ .
4. Кондитерская фабрика выпускает  $N$  сортов конфет. На Новый год фабрика подарила каждому из 1000 учеников школы подарок, содержащий по конфете нескольких сортов (составы подарков могли быть разными). Каждый ученик заметил, что для любых 11 сортов конфет он получил конфету хотя бы одного из этих сортов. Однако оказалось, что для любых двух сортов найдётся ученик, получивший конфету ровно одного из этих двух сортов. Найдите наибольшее возможное значение  $N$ .
5. Числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  удовлетворяют условию  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Докажите, что

$$(x - y)(y - z)(x - z) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

## Второй день

6. На бесконечной ленте выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 2018. Какое число написано на 225-м месте?

39. .998 (222) делят

7. Изначально по кругу расставлены 40 синих, 30 красных и 20 зелёных фишек, причём фишки каждого цвета идут подряд. За ход можно поменять местами стоящие рядом синюю и красную фишки, или стоящие рядом синюю и зелёную фишки. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы любые две стоящие рядом фишки были разных цветов?

8. Серёжа выбрал два различных простых числа  $p$  и  $q$ . Он считает натуральное число  $n$  *хорошим*, если число  $p + q$  можно представить в виде суммы ровно  $q$  чисел, каждое из которых имеет вид  $n^k$  при целом неотрицательном  $k$ . (Например, если бы Серёжа выбрал  $p = 7$  и  $q = 3$ , то он бы счёл число  $n = 2$  хорошим, поскольку  $7 + 3 = 2^3 + 2^0 + 2^0$ .) Докажите, что Серёжа считает хорошими не более двух чисел.

9. В окружности  $\omega$  с центром в точке  $O$  провели непересекающиеся хорды  $AB$  и  $CD$  так, что  $\angle AOB = \angle COD = 120^\circ$ . Касательная к  $\omega$  в точке  $A$  пересекает луч  $CD$  в точке  $X$ , а касательная к  $\omega$  в точке  $B$  пересекает луч  $DC$  в точке  $Y$ . Прямая  $\ell$  проходит через центры окружностей, описанных около треугольников  $DOX$  и  $COY$ . Докажите, что  $\ell$  касается  $\omega$ .

10. В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.