

Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, региональный этап, 2017/18 год

Первый день

1. Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратиков каждого размера было одно и то же количество.
2. Петя и Вася по очереди выписывают на доску натуральные числа, не превосходящие 2018 (выписывать уже имеющееся число запрещено); начинает Петя. Если после хода игрока на доске оказываются три числа, образующих арифметическую прогрессию, — этот игрок выигрывает. У кого из игроков есть стратегия, позволяющая ему гарантированно выиграть?
3. Положительные числа x, y таковы, что $x^5 - y^3 \geq 2x$. Докажите, что $x^3 \geq 2y$.
4. Пусть O — центр окружности Ω , описанной около остроугольного треугольника ABC . На дуге AC этой окружности, не содержащей точку B , взята точка P . На отрезке BC выбрана точка X так, что $PX \perp AC$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BXP , лежит на окружности, описанной около треугольника ABO .
5. Дано нечётное число $n > 10$. Найдите количество способов расставить по кругу в некотором порядке натуральные числа $1, 2, 3, \dots, n$ так, чтобы каждое число являлось делителем суммы двух соседних с ним чисел. (Способы, отличающиеся поворотом или отражением, считаются одинаковыми.)

Второй день

6. Петя выбрал натуральное число n и выписал на доску следующие n дробей:

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \dots, \frac{n-1}{n-(n-1)}.$$

Пусть число n делится на натуральное число d . Докажите, что среди выписанных дробей найдётся дробь, равная числу $d - 1$.

7. Из четырёх одинаковых треугольников сложен выпуклый четырёхугольник. Верно ли, что у этого четырёхугольника обязательно есть параллельные стороны?

8. Дана клетчатая доска 1000×1000 . Фигура *гепард* из произвольной клетки x бьёт все клетки квадрата 19×19 с центральной клеткой x , за исключением клеток, находящихся с x в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске?

9. Докажите, что найдётся такое натуральное число $n > 10^{2018}$, что сумма всех простых чисел, меньших n , взаимно проста с n .

10. Дан треугольник ABC , в котором $\angle A = \angle C = 30^\circ$. На его сторонах AB , BC и AC выбраны точки D , E и F соответственно так, что $\angle BFD = \angle BFE = 60^\circ$. Периметр треугольника ABC равен p , а периметр треугольника DEF равен p_1 . Докажите, что $p \leq 2p_1$.