

Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, финал, 2014/15 год

Первый день

1. Параллелограмм $ABCD$ таков, что $\angle B < 90^\circ$ и $AB < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω , описанной около треугольника ABC , так, что касательные к ω в этих точках проходят через D . Оказалось, что $\angle EDA = \angle FDC$. Найдите угол ABC .
2. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Выпишем дроби $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ и приведём каждую к несократимому виду; сумму числителей полученных дробей обозначим через $f(n)$. При каких натуральных $n > 1$ числа $f(n)$ и $f(2015n)$ имеют разную чётность?
3. В волейбольном турнире участвовали 110 команд, каждая сыграла с каждой из остальных ровно одну игру (в волейболе не бывает ничьих). Оказалось, что в любой группе из 55 команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных 54 команд этой группы. Докажите, что во всём турнире найдётся команда, проигравшая не более чем четырём из остальных 109 команд.
4. Дано натуральное число $N \geq 3$. Назовём набор из N точек на координатной плоскости *допустимым*, если их абсциссы различны, и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ *разделяет* допустимый набор точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот (на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем k любой допустимый набор из N точек можно разделить многочленом степени не более k ?

Второй день

5. Бессмертная блоха прыгает по целым точкам на числовой прямой, стартуя с точки 0. Длина первого прыжка равна 3, второго — 5, третьего — 9, и так далее (длина k -го прыжка равна $2k + 1$). Направление прыжка (вправо или влево) блоха выбирает самостоятельно. Может ли так случиться, что блоха рано или поздно побывает в любой натуральной точке (возможно, побывав в некоторых точках больше, чем по разу)?

6. Действительные числа a, b, c, d , по модулю большие единицы, удовлетворяют соотношению

$$abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

7. Неравносторонний треугольник ABC вписан в окружность ω . Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D . Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P соответственно. Пусть M — середина отрезка PQ . Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω .

8. Даны натуральные числа a и b , причём $a < b < 2a$. На клетчатой плоскости отмечены некоторые клетки так, что в каждом клетчатом прямоугольнике $a \times b$ или $b \times a$ есть хотя бы одна отмеченная клетка. При каком наибольшем α можно утверждать, что для любого натурального N найдётся клетчатый квадрат $N \times N$, в котором отмечено хотя бы αN^2 клеток?