

Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс, региональный этап, 2014/15 год

Первый день

1. За круглым столом сидят 2015 человек, каждый из них — либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Им раздали по одной карточке, на каждой карточке написано по числу; при этом все числа на карточках различны. Посмотрев на карточки соседей, каждый из сидящих за столом сказал: «Моё число больше, чем у каждого из двух моих соседей». После этого k из сидящих сказали: «Моё число меньше, чем у каждого из двух моих соседей». При каком наибольшем k это могло случиться?

2. Назовём натуральное число *интересным*, если сумма его цифр — простое число. Какое наибольшее количество интересных чисел может быть среди пяти подряд идущих натуральных чисел?

3. Правильный треугольник со стороной 3 разбит на девять треугольных клеток, как показано на рисунке. В этих клетках изначально записаны нули. За один ход можно выбрать два числа, находящиеся в соседних по стороне клетках, и либо прибавить к обоим по единице, либо вычесть из обоих по единице. Петя хочет сделать несколько ходов так, чтобы после этого в клетках оказались записаны в некотором порядке последовательные натуральные числа $n, n + 1, \dots, n + 8$. При каких n он сможет это сделать?



4. В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности, вписанной в треугольник ABC , отличные от прямой AC . Они касаются этой окружности в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B, K_1 и K_2 лежат на одной прямой.

Второй день

5. После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени T рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента T ?

6. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB , пересекает вторично сторону BC в точке L . Докажите, что $CB + CL = AB$.

7. Числа a, b, c и d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Докажите, что $(2 + a)(2 + b) \geq cd$.

8. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается тройка, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 1. Сколько последовательностей ему придётся выписать?