

# Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс, региональный этап, 2013/14 год

## Первый день

1. По кругу расставлены 111 различных натуральных чисел, не превосходящих 500. Могло ли оказаться, что для каждого из этих чисел его последняя цифра совпадает с последней цифрой суммы всех остальных чисел?
2. В четырёхугольнике  $ABCD$  стороны  $AD$  и  $BC$  параллельны. Докажите, что если биссектрисы углов  $DAC$ ,  $DBC$ ,  $ACB$  и  $ADB$  образовали ромб, то  $AB = CD$ .
3. Учитель записал Пете в тетрадь четыре различных натуральных числа. Для каждой пары этих чисел Петя нашёл их наибольший общий делитель. У него получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и  $N$ , где  $N > 5$ . Какое наименьшее значение может иметь число  $N$ ?
4. Все клетки квадратной таблицы  $100 \times 100$  пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до 10000. Петя закрашивает клетки по следующим правилам. Вначале он закрашивает  $k$  клеток по своему усмотрению. Далее каждым ходом Петя может закрасить одну ещё не закрашенную клетку с номером  $a$ , если для неё выполнено хотя бы одно из двух условий: либо в одной строке с ней есть уже закрашенная клетка с номером меньшим, чем  $a$ ; либо в одном столбце с ней есть уже закрашенная клетка с номером большим, чем  $a$ . При каком наименьшем  $k$  независимо от исходной нумерации Петя за несколько ходов сможет закрасить все клетки таблицы?

## Второй день

5. Число  $x$  таково, что среди четырёх чисел

$$x - \sqrt{2}, \quad x - \frac{1}{x}, \quad x + \frac{1}{x}, \quad x^2 + 2\sqrt{2}$$

ровно одно не является целым. Найдите все такие  $x$ .

6. Имеются 2013 карточек, на которых написана цифра 1, и 2013 карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек 4026-значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится заплатить как можно меньше?

7. Дан вписанный четырёхугольник  $ABCD$ . Лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $K$ . Оказалось, что точки  $B$ ,  $D$ , а также середины отрезков  $AC$  и  $KC$  лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол  $ADC$ ?

8. Какое из чисел больше:  $(100!)!$  или  $99!^{100!} \cdot 100!^{99!}$ ? (Напомним, что  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ .)