

# Олимпиада «Высшая проба» по математике

11 класс, 2025 год

1. Дан выпуклый многогранник. Разделим длину каждого ребра на сумму длин остальных ребер и вычислим сумму полученных дробей. Докажите, что полученная сумма меньше 1,5.
2. Многочлен  $P(x)$  со старшим коэффициентом 1 имеет только целые коэффициенты, среди которых есть отрицательные. Обязательно ли многочлен  $(P(x))^{2025}$  имеет хотя бы один отрицательный коэффициент?

Не обязательно

3. Дан шестиугольник  $ABCDEF$ , в котором

$$AF = CD, \quad BC = EF, \quad \angle A + \angle D = \angle B + \angle E = 180^\circ.$$

Докажите, что  $2CF \geq AB + DE$ .

4. В комплекте для сборки игрушечного поезда есть один локомотив (который всегда расположен спереди),  $2n$  одинаковых красных вагонов и  $3n$  одинаковых желтых вагонов. Назовем поезд длинным, если в нем есть хотя бы  $n$  вагонов (не считая локомотива). Сколько различных длинных поездов можно собрать, используя этот комплект? (Ответ должен быть дан в замкнутом виде: в ответе не должно быть сумм с переменным числом слагаемых, многоточий и т. д.)

$$n^2 - \binom{1+2n}{2+3n}$$

5. Саша и Гоша поставили 2025 фишек в клетки доски  $1000 \times 1000$  и по очереди ходят. Саша своим ходом может взять две фишки, стоящие в левом верхнем и правом нижнем углу некоторого клетчатого прямоугольника (со сторонами больше 1), и поместить их по одной в две другие угловые клетки того же прямоугольника. Гоша своим ходом может передвинуть любую фишку либо вправо вниз, либо влево вверх по диагонали на любое число клеток. Они заканчивают ходить, когда кто-то не может сделать ход. Могут ли они ходить бесконечно?

Не могут

6. При каких  $n \geq 2025$  существует такой набор из  $n$  прямоугольников, что из них можно собрать прямоугольник (без пустот и наложений), а из любого меньшего их подмножества, состоящего из хотя бы двух прямоугольников, — нельзя?

При всех  $n \geq 2025$