

# Олимпиада «Высшая проба» по математике

10 класс, 2025 год

1. Даны многочлены  $P(x)$  и  $Q(x)$ , оба степени  $n$  со старшими коэффициентами 1. У каждого из них ровно  $n$  различных целых корней. Известно, что все корни многочлена  $P(x)$  четны, а все корни многочлена  $Q(x)$  нечетны. Докажите, что у многочлена  $P(x) + Q(x)$  не может быть целых корней.

2. Дана двусторонняя линейка без делений. Этот инструмент позволяет делать две операции:

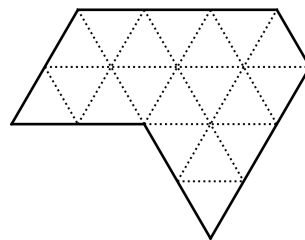
1. провести прямую через две данные точки;
2. провести прямую, параллельную данной, на расстоянии 1 от нее.

Постройте с ее помощью (и не используя никакие другие инструменты) правильный треугольник.

3. На плоскости отмечено 8 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Между каждыми двумя проведен либо красный, либо синий отрезок. Красные отрезки не имеют общих точек, кроме, возможно, отмеченных точек. Обязательно ли найдется треугольник с вершинами в отмеченных точках, все стороны которого синие?

Не обязательно

4. Разрежьте фигуру, составленную из одинаковых равносторонних треугольников (см. рисунок), на три (не обязательно равные) части и сложите из них равносторонний треугольник.



5. По кругу стоит несколько коробок. В одной из них 2025 камней, а остальные пусты. Разрешается взять два камня (возможно, из разных коробок) и переложить один в соседнюю коробку по часовой стрелке, а другой — в соседнюю против часовой стрелки. Через некоторое время все камни оказались в одной и той же коробке, соседней с начальной. Докажите, что один из камней побывал во всех коробках.

6. Существует ли функция  $f$ , определенная на всей числовой прямой, такая, что для любого  $x$  выполнено равенство

$$f(f(x)) = x^2 - x - 1?$$

Не существует