Олимпиада «Высшая проба» по математике

9 класс, 2024 год

1. Петя задумал число x, а Вася — число y, причём Петино число оказалось больше. Затем Петя нашёл значение выражения

$$\frac{x^3}{x^2+x+1},$$

а Вася — выражения

$$\frac{y^3}{y^2+y+1}.$$

Обязательно ли полученное Петей число будет больше Васиного?

да

2. Имеется 26 карточек: по две штуки с числами 1, 2, 3, …, 13. Требуется разложить эти карточки по стопкам так, чтобы:

- любые две одинаковые карточки лежали в одной стопке;
- если две карточки лежат в одной стопке, карточка с суммой чисел на них не лежит в той же стопке.

Каким минимальным количеством стопок можно обойтись?

тремя стопками

3. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке P. Известно, что периметры треугольников APB и CPD равны. Обязательно ли трапеция $ABCD$ является равнобедренной?

да, обязательно

4. Многие учащиеся математического кружка остаются в нём преподавать после выпуска. Будем говорить, что Ваня является *последователем* Саши, если Ваня учился у Саши или если Ваня учился у ученика Саши, ученика ученика Саши и так далее. Преподаватель кружка называется народным, если у него есть последователи, и не менее половины из них — победители международной олимпиады IMO. Известно, что всего в кружке училось 100 победителей IMO. Какое наибольшее количество народных преподавателей может быть в этом кружке, если у каждого человека не более одного учителя и никто не является собственным последователем?

200

5. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. На S_1 и S_2 выбраны точки B и A соответственно такие, что отрезки O_1A и O_2B касаются окружностей и пересекаются в точке C. Докажите, что углы AKC и KBC равны.

6. Дан приведённый квадратный трёхчлен f с целыми коэффициентами. Известно, что если $f(x)$ (x целый) делится на некоторое простое $p > 2024$, то $f(x)$ также делится на p^2. Докажите, что тогда это свойство верно и для всех простых $p < 2024$.