

## Олимпиада «Высшая проба» по математике

11 класс, 2024 год

1. Можно ли число 2024 представить в виде  $a^5 + b^3$ , где  $a$  и  $b$  — натуральные числа?

онжжон 'вг

2. В некотором числе 10 единиц, 100 двоек, 1000 троек, ...,  $10^9$  девяток, расположенных в некотором порядке. Каждую секунду в нём стирают последнюю цифру. Правда ли, что в какой-то момент после начального получится число, делящееся на 9?

вг'ввдн 'вг

3. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$ , в котором  $AB = BC = CD$ , диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $E$ . Описанная окружность треугольника  $ADE$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $P \neq A$  и продолжение стороны  $CD$  в точке  $Q \neq D$ . Докажите, что отрезки  $AP$  и  $DQ$  равны.

4. Есть  $4n$  отрезков длины  $x_1, x_2, \dots, x_{4n}$ , где  $x_1 = 1, x_2 = 2$ , а при  $k > 2$  выполнено  $x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$ . Сколькими способами эти отрезки можно разбить на четвёрки так, чтобы из отрезков каждой четвёрки можно было составить четырёхугольник?

ii(1 - uz)

5. Деревни некоторой языческой страны соединены дорогами так, что от любой деревни можно добраться до любой другой не проходя ни через какую деревню дважды, причём сделать это можно единственным способом. В каждой деревне живет свое племя туземцев. Каждое племя поклоняется одному из трёх идолов: Камню, Ножницам или Бумаге. Известно, что Камень сильнее Ножниц, Ножницы сильнее Бумаги, а Бумага сильнее Камня. Каждое племя желает, чтобы их идол был не слабее, чем идол любого из соседствующих с ними племен. С этой целью каждый вечер ровно в 20:24 каждое племя смотрит на своих соседей и, если обнаруживает соседа с более сильным идолом, меняет свои верования, начиная поклоняться этому более сильному идолу. Верно ли, что рано или поздно все племена начнут верить в одного и того же идола?

ондвд

6. Сфера касается всех рёбер пирамиды, в основании которой лежит выпуклый 2024-угольник. Покрасим в шахматном порядке углы между последовательными рёбрами при вершине вне многоугольника в синий и красный цвета. Докажите, что произведение синусов половинок синих углов равно произведению синусов половинок красных.