

Олимпиада «Высшая проба» по математике

10 класс, 2024 год

1. Можно ли число 2024 представить в виде $a^3 + b^2$, где a и b — натуральные числа?

□ 0123456789

2. Сколько существует таких приведённых квадратных трёхчленов $f(x) = x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами, что $f(f(1000)) = 0$?

□ 32

3. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, точки E и F — основания биссектрис BI и CI соответственно. Прямая AI пересекает описанную около треугольника EIF окружность в точке $T \neq I$. Докажите, что ортоцентр треугольника AEF равноудалён от точек T и I .

4. Многие учащиеся математического кружка остаются в нём преподавать после выпуска. Будем говорить, что Ваня является *последователем* Саши, если Ваня учился у Саши или если Ваня учился у ученика Саши, ученика ученика Саши и так далее. Преподаватель кружка называется народным, если у него есть последователи, и не менее половины из них — победители международной олимпиады ИМО. Известно, что всего в кружке училось 100 победителей ИМО. Какое наибольшее количество народных преподавателей может быть в этом кружке, если у каждого человека не более одного учителя и никто не является собственным последователем?

□ 200

5. Окружность ω описана около треугольника ABC . Биссектриса AL пересекает ω в точке $S \neq A$. Докажите, что длина проекции отрезка AS на прямую AB больше длины отрезка AL .

6. По кругу расставлены натуральные числа. Петя поделил каждое из них на натуральное число, ближайшее к среднему геометрическому соседних чисел. Оказалось, что все полученные числа — натуральные. Чему может быть равно наибольшее из них?

□ 1, 2, 3