

Олимпиада «Высшая проба» по математике

9 класс, 2022 год

1. В этой задаче запись $x \bmod n$, где x — целое, а n — натуральное, обозначает такое целое число y от 0 до $n - 1$, что $x - y$ делится на n . Существует ли такая функция f , определенная для целых значений аргумента и принимающая целые значения, что при любом целом x верно

$$f((x^2 + 1) \bmod 7) = (f(x)^2 + 1) \bmod 11?$$

2. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 — середины ломанных BAC, ABC, ACB соответственно (точка называется серединой ломаной если принадлежит ломаной и делит ее на две ломаных равной длины). Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 проходят через одну точку.

3. Вася пришел в казино, имея один вшэ-коин (единственную в мире виртуальную валюту, которую можно делить на любые части; например, можно поставить на кон $\frac{\pi}{10}$ вшэкоина). В казино игрокам предлагается делать ставки на цвет шара, который будет вытаскен из ящика. Фиксировано число p , причем $1 < p < 2$. Если цвет вытаскенного шара совпадает с тем, на который игрок поставил x денег — игрок получит назад px денег, если не совпадает — не получит ничего. Для ставок в каждом раунде можно использовать не только деньги, имевшиеся к началу игры, но и выигрыши прошлых раундов. Перед началом игры Вася смог подсмотреть, что в ящик положили 2 черных и 3 красных шара (других шаров нет), сыгранные шары обратно в ящик не возвращаются, игра происходит пока ящик не опустеет. Какую максимальную сумму Вася может гарантированно иметь к концу розыгрыша?

4. Напомним, что запись числа n в t -ичной системе счисления это представление

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0} = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \dots + a_0,$$

где a_i — целые числа от 0 до $t - 1$, причем a_k — не ноль. Назовем четырехзначное число \overline{abcd} интересным если $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc}$. Найдите количество пар интересных чисел, сумма которых — тоже интересное число (как функцию от t).

5. M — середина стороны BC треугольника ABC . Касательные, проведенные из M к вписанной окружности треугольника ABC , касаются этой окружности в точках P, Q . Касательные из M к невписанной окружности ABC , касающейся стороны BC , касаются этой окружности в точках R, S . Прямые PQ, RS пересекаются в точке X . Оказалось, что $AX = AM$. Найдите угол BAC .

6. Рассматриваются всевозможные наборы действительных чисел x_1, \dots, x_{2021} , не превосходящих по модулю 1, с суммой 0. Для какого наименьшего C можно любой такой набор расставить по кругу так, что сумма чисел на любой дуге будет по модулю не больше C ?