

Олимпиада «Высшая проба» по математике

7 класс, 2021 год

1. В трёх коробках лежат шарики. В первой — красные, во второй — белые, в третьей лежат шарики и красного, и белого цвета. На каждой коробке сделана надпись «красные», «белые», «смешанные», но известно, что ни одна из надписей не соответствует действительности. Семиклассник Сергей хочет узнать, где какие шарики. Для этого он может распечатать ровно одну коробку и вынуть оттуда ровно один шарик. Сможет ли он добиться своей цели?

2. На доске написано положительное число, с которым разрешается делать следующие операции:

1. умножать на два;
2. прибавлять один.

Каждый из трёх школьников один раз применил к имеющемуся числу первую операцию и два раза вторую операцию в некотором порядке. При этом все три числа оказались различными, и число, полученное первым школьником, превосходит число, полученное вторым школьником, более чем на 60%. Докажите, что число, полученное третьим школьником, превосходит число, полученное вторым школьником, более чем на 30%.

3. В прямоугольном треугольнике KLM проведены биссектрисы KE и LF , пересекающиеся в точке O . Прямая, делящая на две равные части угол EOL , отсекает от исходного треугольника равнобедренный. Найдите острые углы треугольника KLM .

4. (По материалам американских математических соревнований) Собственным делителем числа называется любой делитель, отличный от 1 и самого числа. Найдите число способов, которыми можно раскрасить в три цвета числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так чтобы цвет каждого числа отличался от цвета любого его собственного делителя. Не забудьте объяснить предложенный Вами способ подсчёта.

5. Найдите все четвёрки натуральных чисел a, b, c, d , для которых выполнены равенства

$$\begin{cases} a + b = cd; \\ c + d = ab. \end{cases}$$

6. (Сингапур-2015) Некоторые клетки квадрата 9 на 9 покрашены в чёрный цвет так, что в каждом прямоугольнике из шести клеток ровно две чёрные. Сколько всего клеток в квадрате покрашено? Дайте полный и обоснованный ответ на этот вопрос.