

Олимпиада «Высшая проба» по математике

7 класс, 2020 год

1. В самолёте летят жители города лжецов и жители города рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда обманывают. Все пассажиры сели в ряды по 4 человека, и бортпроводник задал каждому пассажиру один и тот же вопрос. «Верно ли, что в вашем ряду столько же Ваших земляков, сколько жителей другого города?» Прозвучало ровно 70 утвердительных ответов. Сколько лжецов летит в самолёте? Человек считается своим собственным земляком.
2. Имеется пять гирь различного веса, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что две самые тяжёлые гири весят в два раза больше трёх других, а три самые тяжёлые гири весят в восемь раз больше двух других. Найдите наименьшее возможное значение суммарного веса всех гирь.
3. Имеется дробь $\frac{1}{n}$. Семиклассник Семёнов каждую минуту прибавляет к её числителю и знаменателю по 1 и смотрит, можно ли сократить полученную дробь. Семёнов утверждает, что первый раз сократимая дробь получилась после 1000 шагов. Стоит ли ему верить?
4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $AB = BC = CD$, и каждая из диагоналей равна какой-то стороне. Найдите углы четырёхугольника. (Ответ нужно выразить в градусах)
5. Вершины 2019-угольника покрашены в два цвета: 1010 синих и 1009 красных. Сторона с двумя красными вершинами помечена числом 2, сторона с двумя синими вершинами помечена числом $\frac{1}{2}$, а сторона с разноцветными вершинами помечена числом 1. Найдите все возможные значения произведения всех чисел, которыми помечены стороны.
6. Имеется клетчатая доска $(2n + 1) \times (2n + 1)$. В центральной клетке сидит таракан. Семиклассник Семён хочет убить таракана и кидает в него камешками (не обязательно на ту самую клетку, где находится таракан). Пока камешек летит, таракан перебегает в любую соседнюю по стороне клетку. Камешек, попавший на клетку с тараканом, убивает его. Если камешек попал на пустую клетку (без таракана), то на эту клетку таракан заползает больше никогда не будет. (В частности, если во все соседние с тараканом клетки уже попадали камешки, то таракан больше никуда не перебегает.) Как только таракан попадает на край доски, Семён утрачивает к нему интерес и перестаёт кидаться камешками. Найдите наименьший размер доски, при котором Семён гарантированно добьётся своего.